ZUR THEORIE DER FABERSCHEN POLYNOME UND IHRER ZUGEORDNETEN FUNKTIONEN

MAXIMILIAN KRAFFT.

ZUR THEORIE DER FABERSCHEN POLYNOME UND IHRER ZUGEORDNETEN FUNKTIONEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT MARBURG

ACAD
LUGD.BAT
BIBL.

VORGELEGT VON

MAXIMILIAN KRAFFT

AUS

OFFENBACH AM MAIN.

MARBURG I. H. 1915.

DRUCK DER SEIBOLDSCHEN BUCHDRUCKEREI WERNER DOHÁNY
OFFENBACH AM MAIN.

Von der philosophischen Fakultät als Dissertation angenommen am 16. Juli 1914.

Berichterstatter: **Prof. Dr. E. R. Neumann.**

MEINEN LIEBEN ELTERN.

Zwei interessante Abhandlungen G. Fabers in den „Mathematischen Annalen“ beschäftigen sich mit der Theorie sehr allgemeiner Polynomentwicklungen analytischer Funktionen. Diese Faberschen Reihenentwickelungen kennzeichnen sich durch ihre einfachen und übersichtlichen Eigenschaften als naturgemässe Verallgemeinerungen der Taylorschen Reihe. Man kann die Theorie Fabers kurz bezeichnen als eine ebenso schöne wie einfache Anwendung des Fundamentaltheorems der konformen Abbildung: Jeder einfach zusammenhängende Bereich kann konform auf die Kreisfläche abgebildet werden.

Die Darstellung Fabers legt naturgemäss den Nachdruck auf die Erweiterung und weniger auf einen systematischen Aufbau der gesamten Theorie. So scheint manches ziemlich künstlich und gezwungen zu sein, obwohl es in Wirklichkeit die naturgemässe Erweiterung und Fortbildung seiner ursprünglichen Theorie ist. Deshalb soll hier der Versuch einer Darstellung gemacht werden, die den inneren Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Faberschen Polynomen und ihren Verallgemeinerungen klarer zutage treten und ungezwungen zu allen Resultaten gelangen lässt.

Um dies zu erreichen, werden ausser den Faberschen Polynomen noch andere Funktionen eingeführt werden. Diese Funktionen stehen zu den Faberschen Polynomen in ähnlichen Beziehungen, wie z. B. die Kugelfunktionen zweiter Art $Q_n(y)$ zu den Legendreschen Polynomen. Die Einführung dieser „Funktionen zweiter Art“ oder „zugeordneten Funktionen“ liefert auch einen neuen Beweis des Faberschen Satzes von den Nullentwicklungen auf einem

Weg, der eine Verallgemeinerung eines von Frobenius[1]) angegebenen Verfahrens ist.

Betrachtet man die Faberschen Polynomreihen als Verallgemeinerungen der Taylorschen Reihe, so müssen wir sie zusammen mit den Reihen nach zugeordneten Funktionen als Analogon der Laurentschen Reihe bezeichnen.

Die Literatur über unsern Gegenstand ist äusserst dürftig; sie besteht 1. aus den beiden Abhandlungen Fabers „Ueber polynomische Entwicklungen" in den „Mathematischen Annalen", Bd. 57 (1903) und Bd. 64 (1907), von denen die erste einen Teil seiner Dissertation bildet, 2. der Darstellung des Inhalts dieser Abhandlungen in P. Montel, „Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris 1910" und 3. der Dissertation von K. Rieder, „Polynomische Entwicklungen von Funktionen einer komplexen Variabeln, Basel 1911". Weder Montel noch Rieder weichen in der Darstellung und den Resultaten von Faber ab. Die Entwicklungen für das Innengebiet einer Cassinischen Kurve usw., die Rieder besonders eingehend bespricht, sind keine Faberschen Reihen, sondern Reihen nach Potenzen einer Funktion. Wie wir zeigen wollen, gehören solche Reihen zu den Reihen nach zugeordneten Funktionen (vergl. Satz VIII).

§ 1. Die ursprüngliche Theorie Fabers.

Die Polynomreihen, die Faber in seiner ersten Abhandlung (Annalen 57) aufstellt, werden aus der Cauchyschen Integraldarstellung abgeleitet; die zweite Abhandlung enthält allgemeinere Polynomreihen, welche die der ersten als speziellen Fall enthalten. Hier knüpft Faber an einen Satz von Hadamard über den Zusammenhang zwischen den Singularitäten zweier analytischer Funktionen

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

und

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

[1]) Crelles Journal 73 (1871).

mit denen der Funktion

$$F_1(x) = \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu b_\nu x^\nu$$

an. Der Ausgangspunkt der zweiten Abhandlung erscheint auf den ersten Blick als sehr fernliegend. Und doch lässt sich zeigen, dass die Verallgemeinerungen der zweiten Arbeit schon in der ersten im Keim enthalten sind. Es ist deshalb am besten mit einer kurzen Darstellung der ersten Arbeit zu beginnen.

Es sei C die Randkurve eines einfachzusammenhängenden schlichten Gebietes $\mathfrak{G}$ der komplexen Zahlenebene oder Zahlenkugel. Von C wollen wir voraussetzen, dass es aus einem einzigen regulären analytischen Zug bestehe. Ferner ist es offenbar keine Einschränkung, wenn wir annehmen, dass der Punkt $x = 0$ im Innern und $x = \infty$ ausserhalb von $\mathfrak{G}$ liege, da dies ja immer durch eine lineare Transformation erreicht werden kann. Man kann dann den Grundgedanken Fabers, der ihn zu seinen Polynomreihen führt, kurz etwa folgendermassen aussprechen: Wenn es uns gelingt in die Cauchysche Darstellung

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

eine neue Integrationsvariable τ so zu substituieren, dass

$$\frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

übergeht in einen Ausdruck der Form

$$\chi(\tau, x) \cdot d\tau = \frac{\varphi_1(\tau)\, d\tau}{\varphi_2(\tau) - \tau x},$$

unter $\varphi_1(\tau)$ und $\varphi_2(\tau)$ in der Umgebung von $\tau = 0$ reguläre analytische Funktionen verstanden, so wird x^n bei der Taylorschen Entwicklung von $\chi(\tau, x)$ zum erstenmal im Koeffizienten von τ^n auftreten, alle Koeffizienten niedrigerer Potenzen von τ können x^n nicht enthalten. Das bedeutet aber, dass die Koeffizienten der Taylorentwicklung von $\chi(\tau, x)$ notwendig Polynome in x sein müssen.

Eine Substitution für ζ, die dies erreicht, ist die Abbildungsfunktion des Aussengebietes von C auf das Innere

eines Kreises, wenn man dem Punkt $\tau = 0$ den Punkt $x = \infty$ zuordnet. Für diesen Kreis kann man, wie es Faber tut, stets den Einheitskreis nehmen. Ob es zu empfehlen ist, C in dieser Weise auszuzeichnen, soll an einer geeigneten Stelle besprochen werden, wir wollen vorläufig den Kreis nicht spezialisieren und seinen Radius einfach r nennen. Erlaubt ist die Substitution, weil wir C singularitätenfrei vorausgesetzt haben. Diese Voraussetzung ist also wesentlich. Alle Resultate Fabers sind Folgerungen aus diesem so überaus einfachem Gedanken.

Die Abbildungsfunktion

$$\zeta = \psi(\tau)$$

des Aussengebietes von C auf das Innere eines Kreises hat für $\tau = 0$ einen einfachen Pol, da der Punkt $\tau = 0$ dem Punkt $\zeta = \infty$ zugeordnet sein soll. $\psi(\tau)$ ist also in der Umgebung von $\tau = 0$ darstellbar in der Form

$$\psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Dem Kreise $|\tau| = r$ möge die Kurve C entsprechen. Da C singularitätenfrei ist, muss der Konvergenzradius der Potenzreihe $\mathfrak{P}(\tau)$ grösser als r sein. Daraus folgt nun

$$\frac{d\zeta}{\zeta - x} = \frac{\psi'(\tau)d\tau}{\psi(\tau) - x} = \frac{-\frac{a}{\tau^2} + \mathfrak{P}'(\tau)}{\frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) - x} \cdot d\tau = \frac{-a + \tau^2\mathfrak{P}'(\tau)}{a\tau + \tau^2\mathfrak{P}(\tau) - \tau^2 x} \cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{\tau}\chi(\tau, x)\, d\tau,$$

wenn wir

$$\chi(\tau, x) = \frac{-a + \tau^2\mathfrak{P}'(\tau)}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x} = \frac{\tau\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - x}$$

setzen. Dieses $\chi(\tau, x)$ hat ganz die von uns geforderte Form, ist für $\tau = 0$ regulär und gleich -1, also nach Taylor in die Reihe

$$\chi(\tau, x) = -1 + \sum_1^\infty P_\nu(x)\tau^\nu = \sum_0^\infty P_\nu(x)\tau^\nu$$

($P_0 = -1$) entwickelbar. Die Reihe ist bei festgehaltenem x in τ gleichmässig konvergent, und wir haben:

$$F(x) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{F[\psi(\tau)]}{\tau}\,\chi(\tau, x)\,d\tau \quad \frac{1}{2\pi i}\sum_{0}^{\infty} P_\nu(x)\int_{(r)} F[\psi(\tau)]\tau^{\nu-1}\,d\tau.$$

Die Taylorsche Entwicklung von $\chi(\tau, x)$ ist stets möglich, denn x ist ein Punkt innerhalb der Integrationskurve C (sonst würde ja die Cauchysche Integraldarstellung nicht gelten) und τ entspricht einem Punkt ausserhalb oder auf C,

$$\zeta - x = \psi(\tau) - x$$

ist daher ausserhalb und auf C, d. h. innerhalb und auf dem Kreis vom Radius r der τ-Ebene von Null verschieden und bis auf den Pol in $\zeta = \infty$, $\tau = 0$ regulär. Nach einem sehr bekannten Satz ist daher die logarithmische Derivierte von $\psi(\tau) - x$ bis auf einen einfachen Pol in $\tau = 0$ überall im Kreise $|\tau| \leqq r$ regulär. Nun ist

$$\frac{d}{d\tau}\log(\psi(\tau) - x) = \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - x} = \frac{1}{\tau}\chi(\tau, x).$$

Der Konvergenzradius von

$$\sum_{0}^{\infty} P_\nu(x)\,\tau^\nu$$

ist also grösser als r und die vorgenommene gliedweise Integration zulässig. Da wir das Aussengebiet von C auf das Innere des Kreises vom Radius r abgebildet hatten, muss die Integration jetzt im negativen Sinn um den Kreis (r) erstreckt werden. Setzen wir

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} F[\psi(\tau)]\tau^{\nu-1}\,d\tau,$$

so erhalten wir für jedes x in C

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \qquad (P_0 = -1).$$

Die Reihen, die nach den $P_\nu(x)$ fortschreiten, besitzen alle wesentlichen Eigenschaften der Potenzreihen. Die Entwicklung einer Funktion nach den P_ν ist, wenn überhaupt, so nur auf eine einzige Weise möglich; die Reihen konvergieren in ihrem Konvergenzgebiet absolut und gleichmässig, auf der Konvergenzgrenze liegt ein singulärer Punkt der durch die Reihe dargestellten Funktion, die Reihe kann

ausserdem nie in zwei getrennten Gebieten gleichzeitig konvergieren, also nie an verschiedenen Stellen verschiedene Funktionen darstellen. Die Konvergenzgrenzen sind Kurven der Schar, die vermöge $\zeta = \psi(\tau)$ den Kreisen $|\tau| = \text{const.}$ zugeordnet ist. Ausserdem beweist Faber den sehr interessanten Satz, dass die Reihen

$$\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu P_\nu(x)$$

und

$$\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu t^{-\nu}$$

in entsprechenden Punkten ihrer durch $x = \psi(t)$ aufeinander bezogenen Konvergenzgrenzen gleichartige Singularitäten besitzen. Wir werden später angeben, wie dieser Satz für die Verallgemeinerungen der Faberschen Polynomreihen lautet. Es sei ϱ der Konvergenzradius der zweiten Reihe, dann ist $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \varrho$ ($\overline{\lim}$ = limes superior). Nach einem bekannten Satz ist jeder Punkt des Konvergenzkreises von $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu t^{-\nu}$ singulär, der Konvergenzkreis also natürliche Grenze, wenn die a_ν nur der einzigen Bedingung $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \varrho$ unterworfen sind. Der zitierte Satz über die Beziehungen zwischen den Singularitäten von $\Sigma a_\nu P_\nu(x)$ und $\Sigma a_\nu t^{-\nu}$ zeigt, dass auch die Faberschen Reihen ihre Konvergenzgrenze zur natürlichen Grenze haben können.

Die Faberschen Reihen besitzen also alle Eigenschaften der Taylorschen Reihe, jedoch muss hier eine kleine Einschränkung gemacht werden: Eine jede analytische Funktion kann an jeder Stelle, an der sie regulär ist, in eine Taylorsche Reihe entwickelt werden. Für die Faberschen Reihen ist aber notwendig, dass der Existenzbereich eine gewisse Grösse besitzt. Es sei R der Radius des grössten Kreises, in dem $\tau\psi(\tau)$ regulär und $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \neq 0$ ist. Bezeichnet dann C die diesem Kreise entsprechende Kurve der x-Ebene (die eine Singularität besitzt, weil

Singulärwerden von $\psi(\tau)$ oder Verschwinden von $\psi'(\tau)$ die Konformität der Abbildung unterbricht, daher singuläre Kurve der Abbildung genannt), so muss F(x) mindestens im Innern und auf dem Rande des von C begrenzten Gebietes regulär sein. C ist also die Grenze eines Bereiches, auf dem F (x) mindestens regulär sein muss. Frobenius, der in seinen Untersuchungen (Crelles Journal, Bd. 73, 1871) auf einen solchen Bereich kam, nennt ihn daher den „Minimalbereich". Diese Bezeichnung empfiehlt sich wegen ihrer Anschaulichkeit zur allgemeinen Annahme.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass der Kurve C als solcher gar keine ausgezeichnete Rolle zukommt, sie ist nur Repräsentant der „Niveaukurven" der Abbildungsfunktion $\psi(\tau)$, d. h. der Kurven, welche den Kreisen $|\tau| = \text{const.}$ entsprechen. Dagegen ist die singuläre Kurve eine ausgezeichnete Kurve, und es ist offenbar am besten, der ausgezeichneten Kurve überall, wo dies möglich ist, einen ausgezeichneten Kreis, den Einheitskreis, statt des Kreises R zuzuordnen. Man kann dies mit Hilfe einer Aehnlichkeitstransformation $t = R\tau$ immer dann erreichen, wenn R endlich ist. Der Fall, dass R nicht endlich ist, ist nur möglich, wenn $\mathfrak{P}(\tau) = \text{const.} - a$, d. h. $z - a = \frac{1}{\tau}$, die Kurve C also ein Kreis ist und die singuläre Kurve sich auf einen einzigen Punkt $z = a$ reduziert. Als ausgezeichneten Kreis der t-Ebene kann man hier den Kreis mit unendlich grossem Radius betrachten. Dieser Ausnahmefall führt uns auf die Taylorsche Reihe als Spezialfall der Faberschen Reihen. Da wir die Taylorsche Reihe aber bei der Ableitung unserer Resultate als bekannt voraussetzen, so ist dieser Fall für uns zunächst ohne Interesse. Mit Hilfe jeder Niveaukurve von $\psi(\tau)$ erhalten wir dieselben Polynome, da $\psi(\tau)$ ja durch jede beliebige seiner Niveaukurven vollständig definiert ist, wenn wir die Zuordnung von $x = \infty$ zu $\tau = 0$ festhalten und die mögliche Drehung des Kreises der τ-Ebene (Ersetzung von τ durch $\tau . e^{i\vartheta}$) als einflusslos ausser Acht lassen.

Aus der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Faberschen Polynomreihen folgt, dass die Reihen gliedweise

differenzierbar und integrierbar sind. Die so entstehenden Polynome $\frac{dP_\nu(x)}{dx} = P'_\nu(x)$ und $\int_0^x P_\nu(x)dx = \bar{P}_\nu(x)$ ordnen sich unter die bisher betrachteten nicht unter. Es sind neue Polynome, von denen man aber wieder alle Eigenschaften beweisen kann, die die ursprünglichen Polynome auszeichnen.

Eine naheliegende Aufgabe wäre es nun gewesen, die Theorie so zu verallgemeinern, dass auch die durch Differentiation und Integration entstehenden Polynome sich mühelos einordnen und der Kreis der einem Gebiet zugehörigen Polynomentwicklungen insofern in sich abgeschlossen wird, dass er auch durch die durch Differentiation und Integration entstehenden Polynome nicht mehr erweitert werden kann. Dieses Problem hat sich Faber nicht gestellt, wir werden aber nachweisen, dass es durch die von ihm eingeführten Verallgemeinerungen gelöst wird. Da auch umgekehrt diese Faberschen Erweiterungen der Theorie sich im Anschluss an dieses Problem völlig zwanglos ergeben, haben wir gesagt, dass die Keime zu allen Verallgemeinerungen schon in der Theorie der $P_\nu(x)$ enthalten sind.

§ 2. Die Erweiterungen der Theorie.

Faber ist zu seinen Verallgemeinerungen auf einem völlig anderen Wege gekommen, und deshalb zerfällt bei ihm die Gesamtheit seiner Polynome in zwei ganz getrennte Bereiche.

Die erste Verallgemeinerung ist die Multiplikation der erzeugenden Funktion $\chi(\tau, x)$ mit einer Potenzreihe in τ

$$\mathfrak{P}(\tau) = c_0 + c_1\,\tau + c_2\,\tau^2 + \ldots\ldots\ldots$$

deren Konvergenzradius nicht kleiner[1]) ist, als das oben definierte R. Da

$$\chi(\tau, x) = \sum_0^\infty{}_\nu P_\nu(x)\tau^\nu$$

war, ist

$$\mathfrak{P}(\tau).\chi(\tau, x) = \sum_0^\infty{}_\nu \Pi_\nu(x)\tau^\nu,$$

[1]) Für den Fall, dass der Konvergenzradius dieser Reihe $\mathfrak{P}(\tau)$ kleiner ist als R, vergleiche § 8 Anfang.

wenn wir

$$\Pi_\nu(x) \quad c_\nu P_0 + c_{\nu-1} P_1 + c_{\nu-2} P_2 + \ldots + c_0 P_\nu \quad \sum_0^\nu c_{\nu-\lambda} P_\lambda(x)$$

setzen. Da die $P_\nu(x)$ Polynome waren, sind es die $\Pi_\nu(x)$ als endliche Aggregate der $P_\nu(x)$ ebenfalls.

Diese Verallgemeinerung kann offenbar auf jede Funktion $\chi(\tau, x)$, die nach Potenzen von τ entwickelt Polynome erzeugt, angewandt werden. Dass nach den $\Pi_\nu(x)$ ebenfalls jede nach den $P_\nu(x)$ entwickelbare Funktion entwickelt werden kann, folgt aus der Identität

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{F[\psi(\tau)]}{\tau} \chi(\tau, x)\, d\tau \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{F[\psi(\tau)]}{\tau \cdot \mathfrak{P}(\tau)} \cdot \mathfrak{P}(\tau)\chi(\tau, x)\, d\tau$$

Ein bemerkenswerter Umstand muss allerdings erwähnt werden: Die Entwicklungen nach den $\Pi_\nu(x)$ sind nicht immer nur auf eine einzige Art möglich, d. h. zwei Reihen

$$\sum_0^\infty a_\nu \Pi_\nu(x) \text{ und } \sum_0^\infty a'_\nu \Pi_\nu(x)$$

können dieselbe Funktion darstellen, ohne dass $a_\nu = a'_\nu$ für alle ν ist. Ist nämlich α eine Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$, so ist z. B.

$$\sum_0^\infty \alpha^\nu \Pi_\nu(x)$$

eine Reihe mit nicht verschwindenden Koeffizienten, die die Null darstellt, eine sogen. Nullentwicklung, und wir brauchen nur $a'_\nu = a_\nu + \alpha^\nu$ zu setzen, um unsere Behauptung erwiesen zu haben.

Bei der zweiten Verallgemeinerung hatte Faber ein ganz bestimmtes Ziel im Auge, er wollte die Theorie der Kugelfunktionenreihen (Reihen nach Legendreschen Polynomen) unter seine Theorie unterordnen. Da die erzeugende Funktion der Kugelfunktionen $(1 - 2\tau x + \tau^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist, so kann die Verallgemeinerung nur erreicht werden durch eine Theorie, die an Stelle von $\frac{d\zeta}{\zeta - x}$ eine allgemeinere Funktion von x und ζ setzt. Faber benutzt deshalb als Ausgangspunkt

ein Theorem von Hadamard[1]), das die Cauchysche Integraldarstellung als speziellen Fall enthält. Wir können den Satz etwa folgendermassen aussprechen:

Besitzt die Funktion

$$(1) \qquad F(x)=\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$$

die singulären Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ und die Funktion

$$(2) \qquad f(x)=\sum_0^\infty b_\nu x^\nu$$

die singulären Stellen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varkappa, \ldots$, dann hat die Funktion

$$(3) \qquad F_1(x)=\sum_0^\infty a_\nu b_\nu x^\nu$$

in der ganzen Ebene höchstens die Punkte $\alpha_\nu . \beta_\varkappa \left(\begin{matrix}\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}=1,2,\ldots)$ zu singulären Stellen. Die analytische Fortsetzung des Funktionselementes (3) wird durch das Integral

$$(4) \qquad F_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(\zeta) f\left(\frac{x}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

geliefert, das Integral erstreckt über eine geschlossene Kurve um den Punkt $x=0$, die keinen der Punkte α_ν umschliesst, dabei muss der Variabilitätsbereich des im Integranden vorkommenden Parameters x auf eine solche Umgebung von $x=0$ beschränkt werden, dass $f\left(\frac{x}{\zeta}\right)$ längs C nie singulär wird, also nie $\frac{x}{\zeta}=\beta_\varkappa$ wird.

Man sagt dann, die Funktion $F_1(x)$ entstehe aus $F(x)$ durch eine Hadamardsche Transmutation, und schreibt

$$F_1=H(F,f).$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Funktionaloperation H lassen sich aus den Gleichungen (1), (2), (3) ohne weiteres ablesen; man sieht, dass

$$H(F,f)=H(f,F),$$
$$H(F,f_1+f_2)=H(F,f_1)+H(F,f_2)$$

[1]) Hadamard, Théorème sur les séries entières, Acta math. 22 (1898). Vgl. auch Borel, Bulletin de la société mathém. de France, Bd. 26 (1898), und Faber, Ueber einen Satz des Herrn Hadamard, Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 16 (1907).

ist, usw. Ebenso zeigt Formel (3), dass die identische Transmutation, d. h. die Transmutation, die jedes F in sich selbst überführt, durch $f(x) = \frac{1}{1-x}$ gegeben wird. Dass es möglich ist, dass eine spezielle Funktion F(x) auch durch ein anderes f(x) in sich selbst transmutiert wird, ist klar, so führt z. B. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ alle Funktionen F(x) in sich selbst über, bei denen sämtliche $a_{2\nu+1}=0$, die also nur gerade Potenzen von x in ihrer Potenzreihenentwicklung enthalten, die identische Transmutation ist aber die einzige, die alle Funktionen in sich selbst überführt.

Aus (3) können wir auch folgenden Satz ablesen: Ist

$$F_1=H(F,f) \qquad \varphi=H(f,f_1),$$

so ist

$$H(F_1,f_1)=H(F,\varphi).$$

Wir nennen eine Hadamardsche Transmutation umkehrbar, wenn wir f(x) eine solche Funktion $f_1(x)$ zuordnen können, dass aus

$$F_1=H(F,f)$$

umgekehrt

$$F=H(F_1,f_1)$$

folgt, was für eine bei x=0 reguläre Funktion F(x) auch sein mag. Die zuletzt gefundene Relation gibt uns als notwendige und hinreichende Bedingung für $f_1(x)$ die Beziehung

$$H(f,f_1)=\frac{1}{1-x}.$$

Daraus folgt aber, wenn

$$f(x)=\sum_0^\infty b_\nu x^\nu$$

ist, dass

$$f_1(x)=\sum_0^\infty \frac{x^\nu}{b_\nu}$$

sein muss. Da beide Reihen wirklich in einer gewissen Umgebung von x=0 konvergieren sollen, müssen notwendig

1. sämtliche b_ν von Null verschieden sein,
2. sowohl der obere wie der untere Limes der Zahlenfolge $\sqrt[\nu]{|b_\nu|}$ endlich und von Null verschieden sein.

Unter den umkehrbaren Transmutationen greift nun Faber die heraus, bei denen f(x) im Endlichen nur den einzigen singulären Punkt x=1 besitzt. Dann kann auch $f_1(x)$ nur diesen einzigen singulären Punkt besitzen (abgesehen etwa vom Punkt $x=\infty$), und unsere zweite Bedingung geht, wegen der Cauchy-Hadamardschen Formel für den Konvergenzradius, über in die Bedingung:

2') es muss $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 1$ sein.

Für diese speziellen umkehrbaren Transmutationen kann man aus dem allgemeinen Satz von Hadamard folgern, dass alle singulären Punkte von F(x) auch singuläre Punkte von $F_1(x)$ sind und umgekehrt.

Bei jeder beliebigen umkehrbaren Transmutation gilt wegen (4) für F(x) die Darstellung

$$F(x) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C F_1(\zeta) f_1\left(\frac{x}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

die Integration erstreckt über irgend eine Kurve C, in der $F_1(x)$ überall regulär ist, und x auf ein solches Gebiet beschränkt, dass $f\left(\frac{x}{\zeta}\right)$ stetig bleibt. Für die von Faber herausgegriffenen Transmutationen bedeutet dies, dass x irgendwo in C liegen muss. Führen wir unter dem Integral für ζ wieder $\psi(\tau)$ ein, so erhalten wir

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\tau)} F_1[\psi(\tau)]\, f_1\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\, d\tau$$

und

$$\tau f_1\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} = \frac{-a+\tau^2\mathfrak{P}'(\tau)}{a+\tau\mathfrak{P}(\tau)} f_1\left(\frac{\tau x}{a+\tau\mathfrak{P}(\tau)}\right) - \chi(\tau, x)$$

ist nach Potenzen von τ entwickelt wieder erzeugende Funktion eines Systems von Polynomen $p_\nu(x)$

$$\chi(\tau, x) = \sum_0^\infty p_\nu(x)\tau^\nu$$

$$p_0 = -f_1(0) = -\frac{1}{b_0}$$

Diese Polynome besitzen wieder alle wesentlichen Eigenschaften der $P_\nu(x)$, insbesondere sind niemals Nullentwick-

lungen möglich. Auch hier kann die erzeugende Funktion durch Multiplikation mit einer Potenzreihe modifiziert werden und wird dann erzeugende Funktion eines Systems von Polynomen $\pi_\nu(x)$

$$\mathfrak{P}(\tau)\chi(\tau, x) = \sum_0^\infty \pi_\nu(x)\tau^\nu,$$

die unter Umständen wieder Nullentwicklungen zulassen. Die $p_\nu(x)$ enthalten die $P_\nu(x)$ als Spezialfall und die $\pi_\nu(x)$, ebenso die $\Pi_\nu(x)$. Ein System der $p_\nu(x)$, die zur Ellipse gehören, bilden die Legendreschen Polynome.

Warum sich Faber auf die speziellen umkehrbaren Transmutationen beschränkt, bei denen $f(x)$ und $f_1(x)$ im Endlichen nur für $x=1$ singulär werden, lehrt eine einfache Ueberlegung. Bei einer allgemeinen umkehrbaren Transmutation stimmen die singulären Punkte von $F(x)$ und $F_1(x)$ nicht überein, wir können also nicht C als Integrationskurve benutzen, wenn wir $F(x)$ durch unser Integral darstellen, sondern müssen eine andere Kurve C' benützen, die von $F_1(x)$ abhängt. Der Bereich, in dem x variieren darf, damit die Integraldarstellung für $F(x)$ gültig bleibt, besteht im allgemeinen nur aus einem Teil des Innern von C'. Substituieren wir nun für die Integrationsvariable wieder die Abbildungsfunktion $\psi(\tau)$ des Aussengebietes von C, so können wir nur von Fall zu Fall entscheiden, ob diese Substitution erlaubt ist oder nicht, d. h. ob C' die singuläre Kurve von $\psi(\tau)$ umschliesst oder schneidet. Wollten wir aber anstatt der Abbildungsfunktion des Aussengebietes von C die des Aussengebietes von C' einführen, so können wir nicht mehr wie bei den $P_\nu(x)$ mit Hilfe der Cauchy-Weierstraßschen Koeffizientenabschätzung Schlüsse auf die Konvergenz der allgemeinen Faberschen Reihen ziehen, denn man benutzt dabei, dass die Abschätzung für alle x innerhalb der dem Kreise $|\tau| = \text{const.}$ entsprechenden Kurve gilt.

Zwischen den $p_\nu(x)$ und $\pi_\nu(x)$ besteht scheinbar nur ein sehr loser Zusammenhang. Die $\pi_\nu(x)$ treten bei Faber nur als Anhängsel der Theorie der $p_\nu(x)$ auf. Was die $p_\nu(x)$ betrifft, so muss man sagen, dass die Heranziehung der Hadamardschen Transmutation zwar vom Erfolg gerecht-

fertigt wird, denn die Kugelfunktionen werden durch sie tatsächlich in die Theorie hereingezwungen, aber künstlich bleibt dieses Vorgehen doch.

Anders dagegen, wenn wir versuchen, die Polynome $P'_\nu(x) = \frac{dP_\nu}{dx}$ und $\bar{P}_\nu(x) = \int_0^x P_\nu(x)\,dx$ in unsere Theorie einzubeziehen.

Wir benutzen den Umstand, dass die Reihe $\Sigma P_\nu(x)\,\tau^\nu$ bei geeigneter Beschränkung der Variabilitätsbereiche von x und τ auch in x gleichmässig konvergiert. Wenn wir dann immer noch mit solchen τ-Potenzen multiplizieren, dass der Grad jedes Polynoms gleich dem Exponenten der zugehörigen τ-Potenz ist, so finden wir

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\chi(\tau,x)}{dx} = \frac{\psi'(\tau)}{(\psi(\tau)-x)^2} = \frac{1}{\psi(\tau)}\cdot\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\psi(\tau)}\right)^2}$$

$$= \sum_1^\infty \nu P'_\nu(x)\,\tau^{\nu+1}$$

und

$$\tau\int_0^x \chi(\tau,x)\,dx = \tau^2\psi'(\tau)\log\left(1-\frac{x}{\psi(\tau)}\right) = \tau^2\psi(\tau)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\log\left(1-\frac{x}{\psi(\tau)}\right)$$

$$= \sum_0^\infty \nu \bar{P}_\nu(x)\,\tau^{\nu-1}$$

Die erzeugenden Funktionen von $P'_\nu(x)$ und $\bar{P}_\nu(x)$ sind also Funktionen der Form

$$\varphi(\tau)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\,f\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)$$

Soll eine Funktion $F(x)$ nach den $P'_\nu(x)$ oder $\bar{P}_\nu(x)$ entwickelbar sein, so ist dies sicher der Fall, wenn es uns gelingt, eine Funktion $F_1(x)$ zu finden, derart, dass

$$F(x) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{F_1[\psi(\tau)]}{\varphi(\tau)}\cdot\varphi(\tau)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\,f\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)d\tau$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F_1(\zeta)\,f\left(\frac{x}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

und damit sind wir ganz von selbst bei der Hadamardschen Transmutation und der Verallgemeinerung der erzeugenden Funktion durch Multiplikation mit einer Potenzreihe angelangt.

Auf den Satz Fabers über die Bedingungen für die Existenz und die Zahl der von einander linear unabhängigen Nullentwicklungen wollen wir hier nicht eingehen, da er uns später noch beschäftigen wird. Sobald wir diesen Satz besitzen, können wir auch sehen, dass eine naturgemässe Einteilung der Polynome $p_\nu(x)$ und $\pi_\nu(x)$ die ist, bei der die $p_\nu(x)$ und die $\pi_\nu(x)$, die keine Nullentwicklungen besitzen, zusammen den $\pi_\nu(x)$, die Nullentwicklungen zulassen, gegenüber gestellt werden. Denn dass zwischen den $p_\nu(x)$ und $\pi_\nu(x)$ kein prinzipieller Unterschied besteht, zeigt doch schon die Tatsache, dass die $P_\nu(x)$ zu den $p_\nu(x)$ gehören, ihre Ableitungen und Integrale aber zu den $\pi_\nu(x)$.

Wir haben behauptet, dass damit der Kreis der Polynome geschlossen ist. Dies ist richtig. Es sei

$$\chi(\tau, x) \quad \varphi(\tau) \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} f\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)$$

erzeugende Funktion eines Systems Faberscher Polynome, dann hat auch die erzeugende Funktion der Ableitungen dieser Polynome

$$\frac{d\chi(\tau, x)}{dx} = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \cdot \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} f'\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)$$

dieselbe Form. Entsprechendes gilt für die Integration.

Die charakteristischen Eigenschaften der Faberschen Reihen, durch die sie als Verallgemeinerungen der Taylorreihe gekennzeichnet werden, haben wir erwähnt. Eine naheliegende Frage ist nun die nach der analogen Verallgemeinerung der Laurentschen Reihe. Wir haben bisher immer nur von den Faberschen Polynomen für das Innengebiet einer Kurve C gesprochen, man kann sie natürlich auch für das Aussengebiet von C bilden, denn durch die Substitution $x' = \frac{1}{x}$ wird das Aussengebiet von C auf das Innengebiet der entsprechenden Kurve der x'-Ebene abgebildet, und für diese ist die Herleitung der Polynome möglich.

Der naheliegendste Gedanke ist nun auch der von Faber angeführte, die Entwicklung einer in einem Ringgebiet $\mathfrak{R}$ regulären Funktion zusammenzusetzen aus den Faberschen Polynomen für das Innengebiet der äusseren Rand-

kurve und den Polynomen für das Aussengebiet der inneren Randkurve. Sind die beiden Randkurven vorgeschrieben, so ist, wenn wir nicht überhaupt darauf verzichten, Polynomreihen zu erhalten, dies auch der einzige Weg, die Aufgabe zu lösen. Ein empfindlicher Misstand ist aber der, dass wir einmal für jede Kurve im allgemeinen die Auswahl zwischen unendlich vielen verschiedenen Polynomsystemen haben, und dass andererseits die Niveaukurven der zum Aussengebiet der einen und zum Innengebiet der anderen Randkurven gehörenden Abbildungsfunktionen gar nichts mit einander zu tun haben, so dass nicht, wie bei den Entwicklungen für einfach zusammenhängende Gebiete, ein festes Kriterium für die Entwickelbarkeit einer Funktion (dort die Regularität auf dem Minimalbereich) angebbar ist.

Es ist daher am besten das Problem anders zu wenden. Entweder kann man verlangen, dass beide Randkurven des Ringes Niveaukurven sind, dann erhalten wir überhaupt keine Polynome mehr, oder man will das zum Innengebiet (bezw. Aussengebiet) der einen Randkurve C gehörige System von Polynomen durch ein zweites Funktionensystem ergänzen, das dieselben Niveaukurven wie jenes besitzt und den negativen (positiven) Potenzen einer Laurentschen Reihe entspricht, wenn wir die Polynome den positiven (negativen) Potenzen entsprechen lassen. Wir können dann nur noch die eine Randkurve des Rings vorschreiben, die andere ist dann ebenfalls bestimmt. Ein solches Funktionensystem lässt sich stets konstruieren. Es werden sich dann wieder äusserst einfache Kriterien für die Entwickelbarkeit einer in einer gewissen Umgebung von C (d. h. in einem Streifen von nicht verschwindender Breite zu beiden Seiten von C) eindeutigen regulären Funktion ergeben. Unter den verschiedenen Systemen Faberscher Polynome, die zu einer Kurve C gehören, gibt es immer eines, bei denen das zweite Funktionensystem, das System der „zugeordneten Funktionen", aus den Potenzen der Umkehrung $\tau = q(z)$ der Abbildungsfunktion $z = \psi(\tau)$ besteht. Faber hat sich im ersten Teil seiner Dissertation mit Reihen beschäftigt, die nach Potenzen analytischer Funktionen fortschreiten, aber er scheint ihren Zusammenhang mit seinen Polynomen nicht erkannt zu haben.

§ 3. Eine Integraldarstellung für $\frac{1}{y-x}$.

Die Stellung der Hadamardschen Transmutation in der von Faber angewandten Form ist oben erörtert worden. Es erübrigt sich daher bei unserer Darstellung vom Cauchyschen Integral auszugehen und dann zu zeigen, dass die notwendigen Verallgemeinerungen uns auf die Hadamardsche Transmutation führen, es verläuft alles genau so wie dort. Unser nächstes Ziel ist die Aufstellung einer Formel, aus der man die Faberschen Reihen für die Funktion $\frac{1}{y-x}$ ableiten kann, denn es ist ohne weiteres verständlich, dass man im Besitz dieser speziellen Reihen und der Cauchyschen Integraldarstellung die Reihenentwicklung jeder beliebigen analytischen Funktion nach Faberschen Polynomen beherrscht.

Wir wollen im folgenden immer an einigen Bezeichnungen festhalten, die uns in vielen Fällen langer Erläuterungen überheben. Einen beliebigen Punkt der Zahlenebene wollen wir mit z bezeichnen. Ist eine geschlossene Kurve C in der Ebene gegeben, so sollen die Punkte in ihrem Innengebiet x, die in ihrem Aussengebiet y genannt werden. Müssen wir neben der Ebene der z noch eine zweite Zahlenebene betrachten, so soll ein allgemeiner Punkt dieser Ebene t, ein Punkt, in dem dem Innern jener gegebenen geschlossenen Kurve der z-Ebene entsprechendem Gebiet u, im komplementären Gebiet v genannt werden. Integrationsvariable sollen immer mit dem griechischen Buchstaben bezeichnet werden, welcher der Bezeichnung eines allgemeinen Punktes entspricht, also in der Ebene der z mit ζ, in der Ebene der t mit τ.

Eine umkehrbare Hadamardsche Transmutation wird durch zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ charakterisiert, die die Beziehung

$$\frac{1}{1-x} = H(f_1, f_2) \tag{5}$$

erfüllen (s. o. S. 15). Aus dieser symbolischen Gleichung können wir sofort unsere Integraldarstellung für $\frac{1}{y-x}$ ab-

lesen, wenn wir bemerken, dass aus

$$F_1 = H(F, f)$$

folgt:

$$F_1\left(\frac{x}{c}\right) = H\left[F\left(\frac{x}{c}\right),\ f(x)\right].$$

Auf unseren Fall angewendet ergibt sich

$$\frac{1}{1-\frac{x}{y}} = H\left[f_1\left(\frac{x}{y}\right),\ f_2(x)\right],$$

und dies lässt sich (vergl. Formel (4)) auch in der Form schreiben:

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{y} f_1\left(\frac{\zeta}{y}\right) f_2\left(\frac{x}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{6}$$

wenn wir die Variabilitätsbereiche von x und y in geeigneter Weise beschränken. Besitzen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ beide im Endlichen nur den einzigen singulären Punkt $z=1$, so gilt die Formel, wenn x ein beliebiger Punkt innerhalb, y ein beliebiger Punkt ausserhalb von C ist.

Satz I.

Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zwei bei $z=0$ reguläre Funktionen, die die Bedingung

$$\frac{1}{1-z} = H(f_1, f_2) \tag{5}$$

erfüllen, deren Taylorentwicklungen also lauten

$$f_1(z) = \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu z^\nu \qquad f_2(z) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{z^\nu}{b_\nu}$$

so gilt, wenn x auf ein gewisses Gebiet innerhalb, y auf ein anderes Gebiet ausserhalb C beschränkt wird, für $\frac{1}{y-x}$ die Darstellung

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{y} f_1\left(\frac{\zeta}{y}\right) f_2\left(\frac{x}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{6}$$

Besitzen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ im Endlichen beide nur den singulären Punkt $z=1$, so ist der zulässige Variabilitätsbereich für x und y das ganze Innere bezw. Aeussere von C.

§ 4. Eine Reihenentwicklung für $\frac{1}{y-x}$.

Ein bekanntes Verfahren, analytische Funktionen in eine Reihe, die nach gegebenen Funktionen fortschreitet, zu entwickeln, ist das, zunächst $\frac{1}{y-x}$ in eine gleichmässig konvergente Reihe zu entwickeln, deren Glieder Produkte der gegebenen Funktionen von x mit Funktionen von y sind. Dieses Verfahren wollen wir, wie oben erwähnt, einschlagen.

Es handelt sich also darum, die Faberschen Polynome einer Kurve C aufzustellen und das System der Koeffizientenfunktionen zu bestimmen. Dass diese spezielle Entwicklung uns sofort alle Entwicklungen nach den Polynomen liefert, erhellt daraus, dass wir nur in die Cauchysche Integraldarstellung

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int F(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

für $\frac{1}{\zeta - x}$ die gleichmässig konvergente, also gliedweise integrierbare Reihe einzusetzen brauchen, um eine Entwicklung von F(x) zu erhalten.

Eine solche Entwicklung von $\frac{1}{y-x}$ leistet aber noch mehr. Aus ihr entspringen auch Entwicklungen, die nach den Koeffizientenfunktionen fortschreiten. Diese Funktionen besitzen an und für sich und wegen ihrer Beziehungen zu den ursprünglich gegebenen Funktionen manches Interesse.

Als Ausgangspunkt wählen wir die soeben abgeleitete Formel

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{y} f_1\left(\frac{\zeta}{y}\right) f_2\left(\frac{x}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{6}$$

und lassen nur solche Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zu, die im Endlichen nur den einzigen singulären Punkt $z = 1$ besitzen. Dann sind $f_1\left(\frac{\zeta}{y}\right)$ und $f_2\left(\frac{x}{\zeta}\right)$ längs C endliche, eindeutige und stetige Funktionen von ζ, wenn wir noch, woran wir immer festhalten wollen, voraussetzen, dass C nicht durch $z = 0$ geht, sondern diesen Punkt umschliesst.

In das Integral (6) wollen wir jetzt für ζ eine neue Integrationsvariable τ einführen und dann den Integranden

in zwei Bestandteile zerspalten, von denen der eine nur von x und τ, der andere nur von y und τ abhängt. Der erste Bestandteil soll, nach Potenzen von τ entwickelt, erzeugende Funktion eines Systems von Polynomen sein. Wir haben oben gesehen, dass dies der Fall ist, wenn die Substitution von der Form ist

$$z = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Da die Substitution auch in einer engen Beziehung zu der Kurve C stehen muss, wenn die Polynome „zur Kurve C gehören" sollen, d. h. C mögliche Konvergenzgrenze sein soll, liegt es nahe, die Substitution, die Faber gewählt hat, zu machen. Man kann sich aber durch eine ganz einfache Ueberlegung überzeugen, dass wir lediglich diese Substitution machen dürfen, abgesehen etwa von ganz speziellen Fällen. Definiert man nämlich ein Funktionensystem $F_0(z)$, $F_1(z)$, ... $F_\nu(z)$, ... durch eine erzeugende Funktion von der Form $\Sigma F_\nu(z)\,t^\nu$, so werden die Kurven, auf denen $\lim \sqrt[\nu]{|F_\nu(z)|} = \text{const.} = \frac{1}{\alpha}$ ist, eine ausgezeichnete Rolle spielen. Sie werden offenbar die Bereiche begrenzen, auf denen z variieren darf, damit $\Sigma F_\nu(z)\,t^\nu$ für $|t| < \alpha$ konvergiert, und Kurven dieses Systems werden daher auch im allgemeinen Konvergenzgrenzen für die Reihen $\Sigma a_\nu F_\nu(z)$ sein. Hieraus folgt aber, dass den Kreisen $|t| = \text{const.} = \alpha$ die Kurven, welche Konvergenzgrenzen sein können, eindeutig zugeordnet sind. Dies legt uns sofort nahe, der Kurve C einen Kreis vermöge konformer Abbildung zuzuordnen, und dies ist bei der geforderten Form der Substitution nur möglich, wenn man eben die Substitution macht, die Faber gewählt hat, d. h. das Aussengebiet von C so auf das Innengebiet eines Kreises der t-Ebene abbildet, dass sich die Punkte $z = \infty$ und $t = 0$ entsprechen. Wir wollen die Funktion, die dies leistet, stets mit $\psi(t)$ bezeichnen:

$$z = \psi(t) = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Polynome in $\frac{1}{y}$ erhält man, wenn die Substitution die Form hat

$$z = t \cdot \mathfrak{P}(t).$$

Hier drängt sich für $t \cdot \mathfrak{P}(t)$ sofort die Funktion $\Psi(t)$ auf, die das Innengebiet von C so auf das Innere eines Kreises abbildet, dass sich die Punkte $z = 0$ und $t = 0$ entsprechen. Wir betrachten also im Folgenden nur die Substitutionen

$$z = \psi(t) + \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t) \tag{7}$$

$$z = \Psi(t) = t \cdot \mathfrak{P}(t) \tag{7'}$$

unter $\psi(t)$ und $\Psi(t)$ die Abbildungsfunktionen des Aussen- und Innengebiets von C auf eine Kreisfläche verstanden. Den Kreisen $t = \text{const.}$ entsprechen in beiden Fällen geschlossene Kurven der z-Ebene. Diese wollen wir Niveaukurven nennen. Es braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden, dass die Niveaukurven sich nicht schneiden können, und dass die Niveaukurven von $\psi(t)$ und von $\Psi(t)$ völlig verschieden sind. Jede Abbildung besitzt eine ausgezeichnete Niveaukurve, nämlich die dem ersten Kreis, auf dem eine Unterbrechung der Konformität der Abbildung stattfindet, entsprechende. Diese Kreise sind die grössten Kreise, in denen überall $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\Psi}{dt}$ von Null verschieden und $t\psi(t)$ und $\Psi(t)$ regulär sind. Wir nennen diese Kreise die singulären Kreise und ihre Bildkurven die singulären Kurven der beiden Abbildungen, weil sie stets eine Singularität besitzen. Diese Singularität ist im allgemeinen ein mehrfacher Punkt. Wir müssen nur, wenn wir unsere neue Variable t in den Integranden einführen wollen, voraussetzen, dass dieser nach der Substitution für die den Punkten ζ entsprechenden Werte τ von t nicht singulär wird, da sonst die Gültigkeit der Integration in Frage gestellt wird. C darf also nicht singuläre Kurve sein, und muss als aus einem regulären analytischen Zuge bestehend vorausgesetzt werden. Der Radius des Bildkreises von C war noch willkürlich. Wir wollen ihn immer so wählen, dass die singuläre Kurve dem Einheitskreis entspricht, abgesehen von dem oben erwähnten Ausnahmefall, in dem diese Zuordnung nicht möglich ist. Man sieht übrigens sofort, dass im folgenden diese spezielle Zuordnung des Einheitskreises zur singulären Kurve nicht wesentlich ist.

Substituieren wir die Funktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$ für die Integrationsvariable in unserem Integral (6) für $\frac{1}{y-x}$, so erhalten wir die Formeln

$$(8) \qquad \frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{1}{\tau} f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) \frac{\tau\psi'(\tau)}{\psi(\tau).y}\, d\tau,$$

$$(8') \qquad \frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} \frac{1}{\tau} f_1\left(\frac{\Psi(\tau)}{y}\right) f_2\left(\frac{x}{\Psi(\tau)}\right) \frac{\tau\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau).y}\, d\tau,$$

beidesmal die Integration im positiven Sinn um den Bildkreis von C, dessen Radius wir bei der ersten Abbildung mit r, bei der zweiten mit ϱ bezeichnen wollen, erstreckt. Der Vorzeichenwechsel in Formel (8) rührt daher, dass bei der Abbildung des Aussengebietes von C auf das Innere eines Kreises dem positiven Umlaufssinn für diesen Kreis eine positive Umlaufung des Aussengebietes von C, also eine negative des Innengebiets entspricht. Nun war in (6) die Integrationsrichtung positiv, und da wir auch in der t-Ebene immer im positiven Sinn integrieren wollen, müssen wir das Zeichen umkehren.

Wir wollen zunächst nur die Formel (8) betrachten. Im nächsten Paragraphen werden wir dann zeigen, wie wir alle aus ihr gezogenen Sätze auf die Formel (8') zu übertragen imstande sind, so dass wir uns später auf die Untersuchung der aus (8) folgenden Reihenentwicklungen beschränken können.

Da $\psi(t) = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t)$ war, ist

$$f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right) = f_1\left(\frac{a + t\,\mathfrak{P}(t)}{t\,y}\right),$$

$$f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = f_2\left(\frac{t\,x}{a + t\,\mathfrak{P}(t)}\right),$$

$$\frac{t\,\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{-a + t^2\mathfrak{P}'(t)}{a + t\,\mathfrak{P}(t)}.$$

Diese drei Funktionen sind, wenn x und y gegeben sind, analytische Funktionen von t allein. Die Bereiche aber, in denen sie eindeutig und stetig sind, werden wesentlich von den gegebenen Werten von x und y abhängen. Die Bestimmung dieser Bereiche ist nun unsere nächste Aufgabe.

Die Funktion $f_1\left(\frac{z}{y}\right)$ wird, da y ausserhalb der den Nullpunkt umschliessenden Kurve C liegt, für endliches z nur dann singulär, wenn $\frac{z}{y} = 1$ ist. Beschränken wir z auf das Innere der durch y gehenden Niveaukurve von $\psi(t)$, so bleibt $\frac{z}{y} \neq 1$. Diese Niveaukurve existiert immer, da alle Punkte ausserhalb C Bildpunkte besitzen. Von den übrigen Punkten z besitzen nur diejenigen Bildpunkte, die auch ausserhalb der singulären Kurve liegen, es kommen für uns also nur solche z in Betracht, welche in dem von der singulären Kurve und der Niveaukurve durch y gebildeten Ring liegen. Daraus folgt aber, dass $f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ in dem diesem Ring entsprechenden Gebiet eine reguläre Funktion von t ist. Diesem Ringgebiet entspricht aber der Kreisring, der von dem Einheitskreis (Bildkreis der singulären Kurve) und dem durch den Bildpunkt v von y gehenden Kreis gebildet wird. Es ist also $f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ eindeutig und stetig im Kreisring $|v| < |t| < 1$.

$f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ ist immer dann regulär, wenn $\frac{x}{z}$ endlich und nicht gleich 1 ist. Da x einen beliebigen Punkt im Innern von C bedeuten soll und diese Kurve dem Kreis $|t| = r$ entspricht, so heisst das, $f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ ist mindestens für $|t| \leqq r$ regulär. Es sei nun x beliebig, aber fest gegeben, dann wird es einen endlichen Abstand von der Kurve C haben. Nun können zwei Fälle eintreten, einmal kann x innerhalb oder auf der singulären Kurve liegen, oder es kann x zwischen dieser und C liegen. Im ersten Fall ist $f_2\left(\frac{x}{z}\right)$ sogar eindeutig und stetig für alle z ausserhalb der singulären Kurve, $f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ also im Einheitskreis, im zweiten ist $f_2\left(\frac{x}{z}\right)$ sicher dann regulär, wenn wir z auf das Aussengebiet der durch x gehenden Niveaukurve beschränken. Diese Niveaukurve entspricht aber, wenn u wie verabredet, der Bildpunkt von x ist, der ja in

in diesem Falle immer existieren muss, dem Kreis mit dem Radius $|u|$. Daher ist $f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ hier regulär in Kreis $|t| \leqq |u|$.

Der Regularitätsbereich von $\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$ ist unabhängig von x und y. Sowohl $\psi(t)$ wie $\psi'(t)$ sind im Einheitskreis nirgends Null, $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$ hat einen einfachen Pol mit dem Residuum -1 im Punkt $t = 0$ und daraus folgt, dass $\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$ eine im Einheitskreis nicht verschwindende stetige Funktion ist.

Aus der Art der Abbildung schliesst man ohne weiteres, dass, wenn der Bildpunkt u überhaupt existiert, $|v| < |u|$ ist. Die Zahlen u werden im folgenden keine wesentliche Rolle mehr spielen, wichtiger sind die Zahlen $|u|$. Jedem Punkt x ausserhalb der singulären Kurve gehört eine solche Zahl zu. Um unsere Resultate einfacher aussprechen zu können, wollen wir allen Punkten innerhalb und auf der singulären Kurve die Zahl 1 zuordnen. Setzen wir fest, dass $|u|$ gleich dem absoluten Betrag des Bildpunktes u von x ist, wenn x ausserhalb der singulären Kurve liegt, sonst aber gleich 1 ist, so können wir den Einheitskreis leicht in folgende drei Gebiete zerlegen:

(9)
1) den Kreis $|t| \leqq |v|$ oder $\mathfrak{G}_1$,
2) den Kreisring $|v| < |t| < |u|$ oder $\mathfrak{G}_2$,
3) den Kreisring $|u| \leqq |t| < 1$ oder $\mathfrak{G}_3$.

Dieses dritte Gebiet $\mathfrak{G}_3$ kann unter Umständen ganz verschwinden. Haben wir den Kreis in dieser Weise zerlegt, so können wir sagen, als Funktion von t betrachtet, ist

$f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ eindeutig und stetig in $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$,

$f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ eindeutig und stetig in $\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3$,

$\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$ eindeutig, stetig und von Null verschieden in $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3$.

Die Funktion $\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$ können wir leicht in zwei im Einheitskreis reguläre Funktionen zerspalten. Wir setzen

$$(10) \qquad \frac{-t\psi'(t)}{\psi(t)} = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t).$$

Da die linke Seite im Einheitskreis nicht verschwindet, haben φ_1 und φ_2 für $|t|<1$ keine Nullstellen. Wir können die Zerspaltung (10) natürlich auch so vornehmen, dass φ_1 oder φ_2 für $|t|<1$ singulär werden können. Diesem Fall werden wir den Schlussparagraphen widmen, da er uns zu den Nullentwicklungen führt. Führen wir die Zerspaltung in der angegebenen Weise durch, so sind als Funktionen von t eindeutig und stetig

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\varphi_2(t) \cdot f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) \text{ in } \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2, \\ &\varphi_1(t) \cdot f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right) \text{ in } \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3. \end{aligned}$$

Aus der Formel (10) erhalten wir durch Einsetzen in (8)

$$(12) \qquad \frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\varphi_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \cdot \varphi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) \cdot d\tau}{\tau \cdot y}$$

Wir können nun $\varphi_2(t) f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ in $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ nach positiven ganzen Potenzen von t entwickeln

$$(13) \qquad \varphi_2(t) f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = \sum_0^\infty {}_\nu P_\nu(x) t^\nu.$$

Diese Definitionsgleichung gibt die $P_\nu(x)$ als Koeffizienten einer Taylorreihe. Daher gilt die Integraldarstellung

$$(14) \qquad P_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\varphi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) d\tau}{\tau^{\nu+1}}.$$

Diese werden wir später oft gebrauchen, da sie schmiegsamer ist, als die Definition durch die Reihe (13).

Die Kurve C trennt x und y, ihr Bildkreis $t = r$ liegt also im Innern des Bereiches $\mathfrak{G}_2$. Daraus folgt, dass (13) für $t \leq r$ gleichmässig konvergiert. Setzen wir daher in die Formel (8) ein, so können wir gliedweise integrieren und erhalten, wenn wir

$$(15) \qquad Q_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \varphi_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \frac{\tau^{\nu-1}}{y} d\tau$$

setzen, für $\frac{1}{y-x}$ die Darstellung

$$(16) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty{}_\nu P_\nu(x) Q_\nu(y)$$

Durch die Formel (15) werden die $Q_\nu(y)$ als die Koeffizienten von $t^{-\nu}$ in der Laurentschen Entwicklung der Funktion $\varphi_1(t) f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ in dem durch (11) bestimmten Gebiet gegeben.

Fassen wir unsere Resultate zusammen, so erhalten wir

Satz II.

Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die in Satz I (Seite 22) erwähnten Funktionen, liegt x innerhalb, y ausserhalb der Kurve C und ist $\psi(t)$ die Abbildungsfunktion des Aussengebietes von C auf das Innere eines Kreises vom Radius r, so lässt sich $\frac{1}{y-x}$ durch die Reihe

$$(16) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty{}_\nu P_\nu(x) Q_\nu(y)$$

darstellen, wenn wir die beiden Funktionensysteme der P_ν und Q_ν durch die Integrale

$$(14) \qquad P_\nu(x) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{\varphi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) d\tau}{\tau^{\nu+1}},$$

$$(15) \qquad Q_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \varphi_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \frac{\tau^{\nu-1}}{y} d\tau$$

oder durch die erzeugenden Funktionen

$$(13) \qquad \varphi_2(t) f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = \sum_0^\infty{}_\nu P_\nu(x) t^\nu,$$

$$(17) \qquad \varphi_1(t) f_1\left(\frac{\psi_1(t)}{y}\right) \quad \sum_0^\infty{}_\nu Q_\nu(y) t^{-\nu} + t \cdot F(t, y)$$

definieren. Die in diesen Formeln auftretenden Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ sind durch die Relation

(10) $$\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)=\frac{-t\psi'(t)}{\psi(t)}$$

verbunden und r ist, wenn angängig, so normiert, dass der singuläre Kreis dem Einheitskreis entspricht.

Im nächsten Abschnitt soll, wie schon erwähnt, gezeigt werden, wie man die Formel (8) auf (8′) zurückführen kann und wie man alle Sätze über die P_ν und Q_ν auf die aus dieser Formel entspringenden Funktionensysteme überträgt, so dass wir uns auf die Theorie der P_ν und Q_ν beschränken können. Es mag übrigens schon hier darauf hingewiesen werden, dass unsere P_ν nicht mit den P_ν Fabers übereinstimmen, sondern sämtliche p_ν und einen Teil der π_ν mit umfassen.

§ 5. Eine zweite Reihenentwicklung für $\frac{1}{y-x}$.

Genau wie die Formel (8) kann man auch die Formel

(8′) $$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{1}{\tau}f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right)f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\frac{\tau\psi'(\tau)}{\psi(\tau)\cdot y}\,d\tau$$

behandeln. Wir müssen zunächst die Regularitätsbereiche der drei Funktionen

$$f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right),\qquad f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right),\qquad \frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$$

feststellen. Setzen wir fest, dass allen Punkten z ausserhalb und auf der singulären Kurve $|v|=1$ zugeordnet wird, und teilen wir den Einheitskreis wieder in drei Gebiete, nämlich

(9′) $\mathfrak{G}_1'$ oder den Kreis $|t|\leqq|u|$,
$\mathfrak{G}_2'$ oder den Kreisring $|u|<|t|<|v|$,
$\mathfrak{G}_3'$ oder den Kreisring $|v|\leqq|t|<1$,

so finden wir als Regularitätsbereiche dieser drei Funktionen $\mathfrak{G}_1'+\mathfrak{G}_2'$, $\mathfrak{G}_2'+\mathfrak{G}_3'$ und $\mathfrak{G}_1'+\mathfrak{G}_2'+\mathfrak{G}_3'$. Zerfällen wir die im Einheitskreis reguläre und nicht verschwindende Funktion $\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$ in zwei ebensolche Faktoren

(10′) $$\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}=\Phi_1(t)\cdot\Phi_2(t),$$

so ist die in $\mathfrak{G}_1' + \mathfrak{G}_2'$ stetige Funktion $\frac{1}{y}\Phi_1(t)\, f_1\left(\frac{\Psi(t)}{y}\right)$ erzeugende Funktion eines Systems von Polynomen in $\frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y}\Phi_1(t) f_1\left(\frac{\Psi(t)}{y}\right) = \sum R_\nu(y) t^\nu \tag{13'}$$

Für diese Polynome gilt auch die Darstellung

$$R_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{y}\Phi_1(\tau) f_1\left(\frac{\Psi(\tau)}{y}\right)\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}. \tag{14'}$$

Ganz entsprechend wie oben zu dem P_ν gibt es hier zu dem R_ν ein zugeordnetes Funktionensystem S_ν, das wir entweder durch die Integrale

$$S_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \Phi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\Psi(\tau)}\right)\tau^{\nu-1} d\tau \tag{15'}$$

oder als die Koeffizienten der negativen Potenzen von t in der in $\mathfrak{G}_2' + \mathfrak{G}_3'$ gültigen Laurentschen Entwicklung von

$$\Phi_2(t)\, f_2\left(\frac{x}{\Psi(t)}\right) \tag{17'}$$

definieren können. Es gilt dann für $\frac{1}{y-x}$ die Entwicklung

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty R_\nu(y) S_\nu(x). \tag{16'}$$

Die Verwandtschaft zwischen den Polynomen P_ν und den R_ν zeigt sich schon in der ganzen Herleitung, wir wollen jetzt zeigen, dass kein wesentlicher Unterschied zwischen beiden besteht. Die P_ν waren nur für das Innengebiet einer Kurve definiert; wollen wir sie für das Aussengebiet einer Kurve C definieren, so müssen wir dieses Aussengebiet erst durch $z = \frac{1}{z'}$ in das Innengebiet der entsprechenden Kurve C' der z'-Ebene verwandeln. Aus den Punkten y der z-Ebene werden dann Punkte x' der z'-Ebene, aus den Punkten x aber Punkte y'. Als die zu dem Aussengebiet von C gehörigen Polynome P_ν wollen wir die zum Innengebiet von C' gehörigen Polynome definieren. Nach Formel (8) ist jetzt, da wir f_1 und f_2 vertauschen können

$$\frac{1}{y'-x'}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f_2\left(\frac{\xi'}{y'}\right) f_1\left(\frac{x'}{\xi'}\right)\frac{d\xi'}{y'\xi'},$$

oder

$$\frac{xy}{y-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C} x f_2\left(\frac{x}{\xi}\right) f_1\left(\frac{\xi}{y}\right)\frac{d\xi}{\xi}$$

die Integration beidemale im positiven Sinn um C' und C erstreckt. Für ξ' müssen wir jetzt die Abbildungsfunktion des Aussengebietes von C' einsetzen. Diese ist aber nichts anderes als das Reziproke der Abbildungsfunktion des Innengebietes von C, d. h. wir müssen z $\psi(t)$ substituieren. Wir erhalten dann

$$\frac{xy}{y-x}\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} x f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau-\sum_0^\infty P_\nu\left(\frac{1}{y}\right)Q_\nu\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für die $P_\nu\left(\frac{1}{y}\right)$ und $Q_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ erhalten wir hieraus sowohl erzeugende Funktionen wie Integraldarstellungen, die wir auch aus (14) und (15) leicht herleiten können. Ein Vergleich dieser Formeln mit denen für die R_ν und S_ν zeigt, dass

$$R_\nu(y)=\frac{1}{y}P_\nu\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$S_\nu(x)=\frac{1}{x}Q_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist. Die R_ν sind also im wesentlichen die zum Aussengebiet gehörigen P_ν, die S_ν sind die Q_ν des Aussengebietes. Wir können uns daher auf die Theorie der P_ν und Q_ν beschränken, die der R_ν und S_ν ist damit von selbst erledigt. Dies gilt natürlich auch für die Entwicklungen der letzten Paragraphen.

Satz IIa.

Aus der Formel

$$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{1}{\tau}f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right)f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\frac{\tau\,\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau$$

(8′)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{1}{\tau}f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right)f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\Phi_1(\tau)\,.\,\Phi_2(\tau)\,d\tau$$

folgt eine zweite Reihenentwicklung

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} R_{\nu}(y) S_{\nu}(x) \tag{16'}$$

Die R_{ν} sind Polynome in $\frac{1}{y}$, die durch die erzeugende Funktion

$$\Phi_1(t) f_1\left(\frac{\Psi(t)}{y}\right) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} R_{\nu}(y)\, t^{\nu} \tag{13'}$$

oder durch die Integrale

$$R_{\nu}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} \frac{\Phi_1(\tau) f_1\left(\frac{\Psi(\tau)}{y}\right)}{\tau^{\nu+1}} d\tau \tag{14'}$$

definiert sind. Die $S_{\nu}(x)$ sind definiert durch

$$S_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \Phi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\Psi(\tau)}\right) \tau^{\nu-1} d\tau. \tag{15'}$$

Die R_{ν} sind bis auf den Faktor $\frac{1}{y}$ zum Aussengebiet von C gehörige Polynome P_{ν}, die S_{ν} bis auf den Faktor $\frac{1}{x}$ zum Aussengebiet gehörige Funktionen Q_{ν}.

§ 6. Die Funktionen $P_{\nu}(x)$ und $Q_{\nu}(y)$.

In unseren bisherigen Betrachtungen war immer die Kurve C als ausgezeichnete Kurve festgehalten worden. Die Formeln (11) zeigen aber, dass sich die Werte der Integrale (14) und (15) nicht ändern, wenn wir den Kreis (r) durch irgend einen andern in $\mathfrak{G}_2$ liegenden Kreis $|t| = \text{const.}$, d. h. C durch irgend eine die Punkte x und y trennende Niveaukurve von $\psi(t)$ ersetzen.

Diese Bemerkung führt uns sofort zu einigen wichtigen Ungleichungen. Wir betrachten die Gesamtheit aller Punkte x, die innerhalb oder auf der durch einen gegebenen Punkt x_0 (ausserhalb der singulären Kurve) mit dem Bildpunkt u_0 gehenden Niveaukurve liegen, und beschränken t auf den Kreis $|t| \leqq |u_0| - \delta$, $\delta > 0$ beliebig klein. Dann ist in diesem Bereich $f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) \varphi_2(t)$ eine stetige Funktion beider Veränder-

licher, und dasselbe gilt daher von $|f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)\varphi_2(t)|$. Da der Bereich abgeschlossen ist, muss $f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)\varphi_2(t)$ in ihm ein endliches Maximum M besitzen. Wenden wir daher auf die Reihe (13), die erzeugende Funktion der $P_\nu(x)$, die bekannte Cauchy-Weierstrass'sche Koeffizientenabschätzung an, so finden wir

$$|P_\nu(x)| \leqq \frac{M}{(|u_0| - \delta)^\nu} \tag{18}$$

gleichmässig für alle x innerhalb oder auf der Niveaukurve durch x_0. Aus (18) folgt für dieselben x zunächst

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{|u_0| - \delta},$$

und, da die linke Seite von δ unabhängig ist, weiter

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{|u_0|}. \tag{19}$$

Speziell für $x = x_0$ erhalten wir aus der bekannten Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x_0)|} = \frac{1}{u_0}. \tag{20}$$

Die Formeln (18), (19) und (20) kann man auch durch eine einfache Abschätzung des Integrals (14) erhalten. Entsprechend finden wir durch Betrachtung der erzeugenden Funktion $\frac{1}{y} f_1\left(\frac{\psi'(t)}{y}\right)\varphi_1(t)$ der Q_ν oder der Integraldarstellung für diese Funktionen die für alle y ausserhalb der durch den Punkt y_0 (Bildpunkt v_0) gehenden Niveaukurve gültigen Formeln

$$|Q_\nu(y)| \leqq m\,(|v_0| + \delta')^\nu, \tag{21}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|Q_\nu(y)|} \leqq |v_0|, \tag{22}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|Q_\nu(y)|} = |v_0|. \tag{23}$$

Auf die Fälle, in denen in (20) und (23) der lim durch lim ersetzt werden kann, kommen wir noch zurück. Zusammenfassend können wir sagen:

Satz III.

Ist x_0 ein Punkt ausserhalb oder auf der singulären Kurve, dann gibt es eine endliche Konstante M derart, dass, wenn u_0 der Bildpunkt von x_0 ist, für alle x innerhalb oder auf der durch x_0 gehenden Niveaukurve gleichmässig die Ungleichung

$$|P_\nu(x)| \leqq \frac{M}{(|u_0|-\delta)^\nu} \tag{18}$$

für beliebig kleines δ gilt. Aus (18) können dann die weiteren Beziehungen:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{|u_0|}, \tag{19}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x_0)|} = \frac{1}{|u_0|} \tag{20}$$

abgeleitet werden.

Ist y_0 irgend ein Punkt ausserhalb der singulären Kurve, dann gelten für alle y ausserhalb oder auf der Niveaukurve durch y_0 gleichmässig die Ungleichungen (δ' beliebig klein)

$$|Q_\nu(y)| \leqq m\,(|v_0|+\delta')^\nu, \tag{21}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|Q_\nu(y)|} \leqq |v_0|, \tag{22}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|Q_\nu(y_0)|} = |v_0|. \tag{23}$$

Aus den Formeln (18) und (21) können wir sofort einen wichtigen Schluss ziehen. Es sei C irgend eine Niveaukurve von $\psi(t)$, x_0 liege innerhalb, y_0 ausserhalb von C. Entspricht dann C der Kreis vom Radius r, so ist

$$|v_0| < r < |u_0|$$

Wir können daher in (18) und (21)

$$\delta = \frac{|u_0|-r}{2} \qquad \delta' = \frac{r-|v_0|}{2}$$

setzen. Dann ist

$$|u_0|-\delta = \frac{r+|u_0|}{2} \qquad |v_0|+\delta = \frac{r+|v_0|}{2}$$

Wir betrachten jetzt den Reihenabschnitt

$$R_{N,p} = \sum_{N}^{N+p} P_\nu(x)\, Q_\nu(y)$$

der Reihe (16). Liegt x wieder innerhalb oder auf der Niveaukurve durch x_0, y ausserhalb oder auf der durch y_0, so erhalten wir

$$|R_{N,p}| \leqq \sum_{N}^{N+p} |P_\nu(x)\, Q_\nu(y)| \leqq M m \left(\frac{r+|v_0|}{r+|u_0|}\right)^N \sum_{0}^{p} \left(\frac{r+|v_0|}{r+|u_0|}\right)^\nu$$

$$< M \cdot m \left(\frac{r+|v_0|}{r+|u_0|}\right)^N \frac{r+|u_0|}{|u_0|-|v_0|}$$

Wegen $|v_0| < r < |u_0|$ ist aber $\frac{r+|v_0|}{r+|u_0|}$ ein echter Bruch, die rechte Seite der Abschätzung ist von p unabhängig, und wir können sie daher für jedes p unter eine gegebene Grenze herabdrücken, wenn wir nur N gross genug nehmen, gleichzeitig für alle x und y, die unseren Voraussetzungen genügen. Damit ist die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe (16) für diese x und y bewiesen.

Satz IV.

Ist C irgend eine Niveaukurve von $z = \psi(t)$ und beschränken wir x auf ein abgeschlossenes Gebiet innerhalb, y auf ein ebensolches Gebiet ganz ausserhalb von C, so konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{0}^{\infty} P_\nu(x)\, Q_\nu(y) \tag{16}$$

in beiden Variabeln absolut und gleichmässig.

Um weitere Sätze herzuleiten, müssen wir uns näher mit den Funktionen $P_\nu(x)$ und $Q_\nu(y)$ beschäftigen. Die $P_\nu(x)$ zunächst waren definiert durch das Integral

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\varphi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) d\tau}{\tau^{\nu+1}} \cdot \tag{14}$$

Beschränken wir t auf den Bereich $t \leqq r + \delta$, so ist für genügend kleine x die Reihe

$$f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = \sum_0^\infty \varkappa \frac{x^\varkappa}{b_\varkappa} [\psi(t)]^{-\varkappa}$$

eine gleichmässig konvergente Reihe von Funktionen von t. Setzen wir sie in das Integral (13) ein, so können wir gliedweise integrieren und erhalten

$$P_\nu(x) = \sum_0^\infty \varkappa \frac{x^\varkappa}{b_\varkappa} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{[\psi(\tau)]^{-\varkappa} \varphi_2(\tau)}{\tau^{\nu+1}} d\tau.$$

$\varphi_2(t)$ und $\psi(t) = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t)$ verschwinden im Einheitskreis nirgends, daher ist $[\psi(t)]^{-\varkappa}$ dort regulär und

$$\frac{[\psi(t)]^{-\varkappa} \varphi_2(t)}{t^{\nu+1}} = \frac{t^{\varkappa-\nu-1} \varphi_2(t)}{[a + t\mathfrak{P}(t)]^\varkappa}$$

ist höchstens für $t = o$ unstetig. Auch diese Unstetigkeit ist nicht vorhanden, wenn $\varkappa \geq \nu + 1$ ist, für $\varkappa < \nu + 1$ ist sie ein Pol genau von der Ordnung $\nu + 1 - \varkappa$. Die Reihe für $P_\nu(x)$ reduziert sich daher auf die $\nu + 1$ ersten Glieder, $P_\nu(x)$ ist ein Polynom vom Grade ν. Dass $P_\nu(x)$ ein Polynom von höchstens ν. Grade sein musste, zeigte schon die Schlussweise Fabers, die wir auf Seite 7 angeführt haben, unsere Integraldarstellung aber zeigt, dass der Grad genau gleich ν ist.

Satz V.

Die $P_\nu(x)$ sind Polynome, deren Grad mit ihrem Index übereinstimmt. Setzen wir

$$P_\nu(x) = \sum_0^\nu \varkappa a_\varkappa^{(\nu)} x^\varkappa \tag{24}$$

so gilt für die $a_\varkappa^{(\nu)}$ die Darstellung

$$a_\varkappa^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i b_\varkappa} \int_{(r)} \frac{[\psi(\tau)]^{-\varkappa} \varphi_2(\tau)}{\tau^{\nu+1}} d\tau. \tag{25}$$

Die Funktionen $Q_\nu(y)$ sind durch das Integral (15) definiert. Nun braucht aber ein bestimmtes Integral, dessen Integrand analytisch von einem Parameter abhängt, keine analytische Funktion dieses Parameters zu sein, wie jedes darstellende Integral, z. B. die Fouriersche Integralformel, zeigt. Es lässt sich nun leicht die Existenz einer Ableitung

von $Q_\nu(y)$ direkt nachweisen, also zeigen, dass $Q_\nu(y)$ eine analytische Funktion ist, dieser Nachweis ist aber überflüssig, wenn wir zeigen, dass es eine Umgebung von $y = \infty$ gibt, in der sich $Q_\nu(y)$ durch eine konvergente Potenzreihe nach $\frac{1}{y}$ darstellen lässt.

Beschränken wir t auf den Bereich $r - \delta \leqq t \leqq 1 - \varepsilon$, so ist $\left|\frac{\psi(t)}{y}\right|$ für genügend grosse y für alle diese t kleiner als 1. Für diese y ist daher

$$f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right) = \sum_0^\infty \varkappa \frac{b_\varkappa}{y^\varkappa} [\psi(t)]^\varkappa$$

eine gleichmässig konvergente Reihe nach Funktionen von t. Setzen wir diese Reihe in die Definitionsgleichung der $Q_\nu(y)$ ein, so gilt für die hier zulässigen y die Darstellung von $Q_\nu(y)$ als Potenzreihe

$$Q_\nu(y) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \varphi_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \tau^{\nu-1} d\tau$$

(15)

$$- \sum_0^\infty \varkappa \frac{b_\varkappa}{y^{\varkappa+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} [\psi(\tau)]^\varkappa \varphi_1(\tau) \tau^{\nu-1} d\tau$$

Nun ist

$$[\psi(t)]^\varkappa = \frac{[a + t\,\mathfrak{P}(t)]^\varkappa}{t^\varkappa}$$

und daher ist

$$[\psi(t)]^\varkappa \varphi_1(t) t^{\nu-1} = [a + t\,\mathfrak{P}(t)]^\varkappa \varphi_1(t) t^{\nu-\varkappa-1}$$

eine im Einheitskreis reguläre Funktion, solange

$$\varkappa \leqq \nu - 1.$$

Die zu diesen $\varkappa$ gehörigen Koeffizientenintegrale sind daher sämtlich gleich Null. Das erste nichtverschwindende Integral ist das bei $y^{-(\nu+1)}$, dieses ist stets von Null verschieden und hat den Wert $a^\nu \cdot \varphi_1(0)$. $Q_\nu(y)$ hat also im Punkt $y = \infty$ eine $(\nu+1)$-fache Nullstelle.

Satz VI.

Die Funktionen $Q_\nu(y)$ sind analytische Funktionen, die im Punkt $y = \infty$ eine $(\nu+1)$-fache Nullstelle besitzen. Ist

(26)

$$Q_\nu(y) = \sum_\nu^\infty \varkappa \frac{c_\varkappa^{(\nu)}}{y^{\varkappa+1}}$$

die bei $y=\infty$ gültige Potenzreihenentwicklung von Q_ν, so ist

$$c_\varkappa^{(\nu)} = \frac{b_\varkappa}{2\pi i}\int_{(r)} [\psi(\tau)]^\varkappa \varphi_1(\tau)\tau^{\nu-1}\,d\tau. \tag{27}$$

Wir nennen die Q_ν das System der den P_ν zugeordneten Funktionen.

Aus Satz V und VI können wir folgenden Satz herauslesen:

Satz VII.

Die Polynome $P_\nu(x)$, die zu $f_1(z)=\sum_0^\infty b_\nu z^\nu$ gehören, entstehen aus den zur identischen Transmutation[1]) $\frac{1}{1-z}$ gehörigen Polynomen durch die Hadamardsche Transmutation mit $f_2(z)$. Ebenso entstehen die $Q_\nu(y)$ aus den zu $\frac{1}{1-z}$ gehörigen zugeordneten Funktionen durch Transmutation mit $f_1(z)$. Dabei ist angenommen, dass $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ dieselben bleiben.

Wir beherrschen, wie dieser Satz zeigt, die allgemeinsten Q_ν, wenn wir die speziellen zu $\frac{1}{1-z}$ gehörigen, die wir $q_\nu(y)$ nennen wollen, in unserer Gewalt haben. Wir wollen über die $q_\nu(y)$ nur einen Satz ableiten: die Definitionsgleichung (15) gibt, da wir $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$ setzen müssen

$$q_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{1}{y}\frac{\varphi_1(\tau)\tau^{\nu-1}}{1-\frac{\psi(\tau)}{y}}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{\varphi_1(\tau)\tau^{\nu-1}\,d\tau}{y-\psi(\tau)}.$$

Wir hatten das Aussengebiet der Kurve C konform, also umkehrbar eindeutig, auf das Innere des Kreises (r) abgebildet. Deshalb folgt aus

$$z=\psi(t)=\frac{a}{t}+\mathfrak{P}(t)$$

umgekehrt

$$t=\mathfrak{q}(z)$$

[1]) Vergleiche Seite 15.

und $\mathfrak{q}(z)$ ist eine überall auf und ausserhalb von C reguläre Funktion, die im Punkt Unendlich eine einfache Nullstelle besitzt. Führen wir in dem Integral für $q_\nu(y)$ statt z wieder ζ ein, so erhalten wir, da bei im Unendlichen verschwindenden Funktionen die Cauchysche Integraldarstellung auch für die Umgebung des unendlich fernen Punktes ungeändert gilt

$$q_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi_1(\mathfrak{q}(\zeta))[\mathfrak{q}(\zeta)]^\nu \, \mathfrak{q}'(\zeta)\, d\zeta}{y-\zeta} = -\varphi_1(\mathfrak{q}(y))[\mathfrak{q}(y)]^{\nu-1}\mathfrak{q}'(y)$$

Die $q_\nu(y)$ sind also im wesentlichen die Potenzen von $\mathfrak{q}(y)$. Die Reihen nach Potenzen von $\mathfrak{q}(y)$ selbst erhalten wir, wenn wir

$$(29) \qquad \varphi_1(t) = -t^2\psi'(t) \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{t\psi(t)}$$

setzen, es ist dann

$$(30) \qquad q_\nu(y) = [\mathfrak{q}(y)]^{\nu+1}$$

Die Reihen nach Potenzen von Funktionen $\mathfrak{q}(y)$ sind schon lange bekannt, sie finden sich z. B. schon bei Puiseux. Faber hat ihnen den ersten Teil seiner Dissertation gewidmet, es geht aber aus seinen Abhandlungen nicht hervor, dass er den Zusammenhang seiner Polynomreihen mit diesen Reihen gekannt hat. Auch Montel gibt nur eine kurze Darstellung dieser Reihen im Anschluss an Faber.

Satz VIII.

Ist $t \quad q(z)$ die Umkehrung von $z = \psi(t)$, so haben die zur identischen Transmutation $f_1(z) \quad \frac{1}{1-z}$ gehörigen zugeordneten Funktionen die Form

$$(28) \qquad q_\nu(y) = -\varphi_1(\mathfrak{q}(y)) \cdot [\mathfrak{q}(y)]^{\nu-1}\mathfrak{q}'(y).$$

Setzen wir speziell

$$(29) \qquad \varphi_1(t) = -t^2\psi'(t),$$

so erhalten wir die Potenzen von $q(y)$

$$(30) \qquad q_\nu(y) = [\mathfrak{q}(y)]^{\nu+1}.$$

Die Gleichung (20) lässt sich, wie Faber zeigt (Polynomische Entwicklungen II, Seite 122), noch verschärfen, wenn $f_2(z) = (1-z)^\alpha$ (α nicht positiv ganz oder Null) ist, er

beweist die Verschärfung nur für den Fall $\varphi_1(t) = -1$, bemerkt aber selbst, dass sie auch im allgemeinsten Fall gültig bleibt. Mit Hilfe einer asymptotischen Abschätzung, die sich bei Darboux findet, lässt sich nämlich für die erwähnten Funktionen $f_2(z)$ die Existenz zweier positiver nicht verschwindender Zahlen g und G beweisen, derart, dass mindestens von einem gewissen ν an für Punkte x_0 ausserhalb der singulären Kurve in unserer Bezeichnung

$$\frac{g}{|u_0|^\nu} < |P_\nu(x_0)| < \frac{G}{|u_0|^\nu}$$

ist, und daraus folgt

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x_0)|} = \frac{1}{|u_0|}. \tag{31}$$

Dies ist viel mehr, wie wir im allgemeinen Fall beweisen konnten, da unsere Formel lautete

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x_0)|} = \frac{1}{|u_0|}. \tag{20}$$

Wichtig wird diese Verschärfung (31) von (20) bei der Betrachtung der Reihen, die nach den $P_\nu(x)$ fortschreiten; in den Fällen, in denen sie gilt, ist nämlich die Reihe stets gleichmässig konvergent auf jedem Gebiet, das ganz im Innern der ersten Niveaukurve, die durch einen singulären Punkt der dargestellten Funktion geht, liegt, ausserhalb dieser Niveaukurve aber divergiert die Reihe überall. In den Fällen, in denen nur (20) gilt, kann die zweite Eigenschaft nicht bewiesen werden. Faber behauptet ohne Beweis auf Seite 125 seiner zweiten Abhandlung, dass eine Reihe $\sum_0^\infty \nu a_\nu P_\nu(x)$ ausserhalb der dem Kreise $|\tau| = \lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ zugeordneten Niveaukurve „jedenfalls nicht in einem zweidimensionalen Kontinuum" konvergiert. Der Beweis für diese Behauptung kann erst im nächsten Paragraphen erbracht werden, da er die Kenntnis einiger Sätze über die Reihen nach den $P_\nu(x)$ erfordert.

Die Formel

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x_0)|} = \frac{1}{|u_0|} \tag{31}$$

hat eine sehr interessante Bedeutung, sie sagt offenbar aus,

dass es, wenn n gegeben ist, eine Niveaukurve von z $\psi(t)$ gibt, in der alle Nullstellen der $P_\nu(x)$ liegen, deren Index nicht kleiner als n ist.

Auch für die $Q_\nu(y)$ lässt sich unter geeigneten Voraussetzungen über $f_1(z)$ eine der Gleichung (31) analoge Verschärfung der Gleichung (23) beweisen.

§ 7. Die Entwicklungen analytischer Funktionen nach den P_n und Q_n.

Wir haben jetzt alle Mittel im Besitz, um die Theorie der Reihen nach den P_ν und Q_ν zu erledigen. Zunächst folgt aus Satz IV, Seite 37, dass bei festgehaltenem x die Reihe für $\frac{1}{y-x}$ gleichmässig konvergiert auf jedem Bereich, der ganz ausserhalb der durch x gehenden Niveaukurve, bezw. der singulären Kurve (je nach der Lage von x) liegt. Entsprechend konvergiert die Reihe gleichmässig bei festgehaltenem y für jeden abgeschlossenen Bereich innerhalb der Niveaukurve durch y. Es sei nun F(x) eine innerhalb und auf der Niveaukurve C eindeutige stetige analytische Funktion. Ist x ein innerer Punkt dieses Gebietes, dann gilt wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty P_\nu(x) Q_\nu(y)$$

für F(x) die Darstellung:

$$F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,d\xi = \sum_0^\infty P_\nu(x) \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\xi) Q_\nu(\xi)\,d\xi$$

(32)

$$= \sum_0^\infty A_\nu P_\nu(x).$$

Für die Koeffizienten A_ν erhalten wir dieselben Werte, welche Niveaukurve von $\psi(t)$ innerhalb der ersten durch einen singulären Punkt von F(x) gehenden Niveaukurve wir auch für C wählen. Dies und eine einfache Abschätzung des Integrals

(33)
$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int F(\xi) Q_\nu(\xi)\,d\xi$$

mit Hilfe der Formel (21) liefert uns wegen (18) den

Satz IX.

Jede innerhalb und auf einer Niveaukurve C von $z = \psi(t)$ reguläre Funktion $F(x)$ ist in eine Reihe nach den $P_\nu(x)$ entwickelbar

$$F(x) = \sum_0^\infty {}' A_\nu P_\nu(x). \tag{32}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Bereich, der ganz innerhalb der ersten Niveaukurve liegt, die durch einen singulären Punkt von $F(x)$ geht. Für die A_ν gilt dabei die Formel

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\zeta)\, Q_\nu(\zeta)\, d\zeta. \tag{33}$$

Alle Ableitungen der letzten Paragraphen waren darauf gegründet, dass y nicht innerhalb oder auf der singulären Kurve liegen durfte. Wir können daher die erste Hälfte von Satz IX durch folgenden Satz ersetzen:

Satz X.

Nennen wir den durch die singuläre Kurve begrenzten abgeschlossenen Bereich den Minimalbereich, so können wir sagen: Jede mindestens auf dem Minimalbereich reguläre Funktion ist nach den $P_\nu(x)$ entwickelbar.

Ganz entsprechend finden wir den Satz:

Satz XI.

Jede in einer gewissen Umgebung des Punktes $y = \infty$ reguläre und für $y = \infty$ verschwindende Funktion $f(y)$ ist in eine Reihe nach $Q_\nu(y)$ entwickelbar

$$f(y) = \sum B_\nu\, Q_\nu(y), \tag{34}$$

jedoch stellt die Reihe die Funktion $f(y)$ höchstens ausserhalb der singulären Kurve dar. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmässig in jedem ganz ausserhalb jeder Niveaukurve C, auf der $f(y)$ noch regulär ist, liegenden Bereiche. Für die B_ν gilt die Darstellung

$$B_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_C P_\nu(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta. \tag{35}$$

Aus Satz X und XI können wir folgenden Satz zusammensetzen, der uns das Analogon der Laurentschen Reihe gibt:

Satz XII.

Ist ein von zwei Niveaukurven C′ und C″ von $z = \psi(t)$ gebildeter Ring gegeben, so ist jede auf diesem Ring reguläre Funktion $\Phi(\zeta)$ in ihm in eine Reihe nach P_ν und Q_ν entwickelbar

$$\Phi(\zeta) = \sum_0^\infty{}_\nu [A_\nu P_\nu(\zeta) + B_\nu Q_\nu(\zeta)]. \tag{36}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmässig in jedem ganz in dem Ring liegenden Gebiet. Für die Koeffizienten A_ν und B_ν gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \Phi(\zeta) Q_\nu(\zeta)\, d\zeta \\ B_\nu &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} \Phi(\zeta) Q_\nu(\zeta)\, d\zeta. \end{aligned} \tag{37}$$

Die Integration einmal erstreckt über die äussere Randkurve C′, das anderemal über die innere Randkurve C″.

Wir betrachten jetzt allgemeine Reihen von der Form

$$\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu P_\nu(x) \qquad \text{und} \qquad \sum_0^\infty{}_\nu b_\nu Q_\nu(y)$$

Aus der Formel (19) und (22) folgt dann sofort, dass die erste Reihe sicher konvergiert innerhalb der dem Kreise $\overline{\lim}_\nu \sqrt[\nu]{|a_\nu|}\,|t|$ zugeordneten Niveaukurve, die zweite aber ausserhalb der Niveaukurve, die dem Kreise

$$|t| = \frac{1}{\overline{\lim}_\nu \sqrt[\nu]{|b_\nu|}} = \lim_\nu \frac{1}{\sqrt[\nu]{|b_\nu|}}$$

entspricht. Für Gebiete, die ganz innerhalb bezw. ausserhalb dieser Niveaukurven liegen, ist die Konvergenz sogar absolut und gleichmässig.

Wir können jetzt auch den schönen Satz Fabers über die Beziehung zwischen den Singularitäten der beiden Funktionen

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x),$$

(38)

$$f(t) = \sum_0^\infty a_\nu t^{-\nu}$$

herleiten. Es ist wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe für f(t), wenn wir für $P_\nu(x)$ seine Integraldarstellung einsetzen

$$F(x) = \sum \frac{a_\nu}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\varphi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) d\tau}{\tau^{\nu+1}} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \varphi_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$- \frac{-1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{1}{\varphi_1(\tau)} f(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau.$$

Bezeichnen wir jetzt mit t q(z) wie oben die Umkehrfunktion von z $\psi(t)$ und transformieren wir das Integral in die z-Ebene zurück, so erhalten wir

$$F(x) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f[q(\zeta)]}{\varphi_1[q(\zeta)]} \cdot f_2\left(\frac{x}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Diese Formel erinnert sehr an die Formel (4), die Integraldarstellung der Hadamardschen Transmutierten einer Funktion, jedoch ist hier ein Unterschied: $\frac{f[q(z)]}{\varphi_1[q(z)]}$ wird innerhalb C (z. B. auf der singulären Kurve) singulär. Da aber $\frac{f[q(z)]}{\varphi_1[q(z)]}$ wie man leicht sieht, längs C eindeutig und stetig bleibt, so bleibt der Satz von der Multiplikation der Singularitäten erhalten, wie Faber in seiner Abhandlung „Ueber einen Satz des Herrn Hadamard", Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 16 (1907), gezeigt hat. Da $\frac{1}{\varphi_1[q(z)]}$ ausserhalb von C regulären Verhaltens ist, finden wir unter Benutzung der speziellen Eigenschaften von $f_2(z)$, dass die singulären Punkte β von f(t) aus den singulären Punkten α von F(x) durch $\beta = \psi(\alpha)$ entstehen. Ein ganz entsprechender Satz gilt für die beiden Reihen $\Sigma b_\nu Q_\nu(y)$ und $\Sigma b_\nu t^\nu$.

Satz XIII.

Die Reihe $F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ konvergiert absolut und gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Bereich innerhalb der durch $t = \lim_\nu \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ bestimmten Niveaukurve. Sind die singulären Punkte der Funktion $F(x)$ die Punkte $x = \alpha$ und die singulären Punkte von $f(t) = \sum_0^\infty a_\nu t^{-\nu}$ die Punkte $t = \beta$, so besteht zwischen den α und den β die Beziehung

(39) $$\alpha = \psi(\beta).$$

Ist speziell $f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{1-z}$, so sind die Singularitäten von $F(x)$ und $f(t)$ von gleicher Natur.

Die Reihe $\Phi(y) = \sum_0^\infty b_\nu Q_\nu(y)$ konvergiert absolut und gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Bereich ausserhalb der durch $t = \lim_\nu \frac{1}{\sqrt[\nu]{|b_\nu|}}$ bestimmten Niveaukurve. Sind die Punkte α die singulären Punkte von $\Phi(y)$ und die Punkte β die singulären Punkte der beiden Funktionen $\varphi(t) = \Sigma b_\nu t^\nu$ und $\frac{1}{\varphi_2(t)}$, so besteht zwischen den α und den β wieder die Beziehung

(39) $$\alpha = \psi(\beta).$$

Wir untersuchen nun die Frage, ob die Entwicklung einer Funktion nach den P_ν und Q_ν auf mehrere Arten möglich ist, d. h. ob in einem Gebiet

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x) = \sum_0^\infty a'_\nu P_\nu(x)$$

und

$$f(y) = \sum_0^\infty b_\nu Q_\nu(x) \quad \sum_0^\infty b'_\nu Q_\nu(y)$$

sein kann, ohne dass $a_\nu \quad a'_\nu$ und $b_\nu \quad b'_\nu$ für alle ν ist. Wir werden zeigen, dass dies zu verneinen ist, aber wir

müssen vorher noch die oben erwähnte Behauptung Fabers beweisen, dass bei Reihen nach Faberschen Polynomen $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ ausserhalb der durch $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = |t|$ bestimmten Niveaukurve „jedenfalls nicht in einem zweidimensionalen Kontinuum Konvergenz stattfinden kann". Diese Behauptung ist eine Folge des Satzes:

Satz XIV.

Ist $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen und ist in einem Punkte x_0 (Bildpunkt t_0)

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[m_n]{|P_{m_n}(x_0)|} = \frac{\vartheta}{|t_0|} < \frac{1}{|t_0|},$$

so gibt es in jeder noch so kleinen Umgebung des Punktes x_0 Punkte x, in denen sich $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[m_n]{|P_{m_n}(x)|}$ beliebig wenig von $\frac{1}{|t|}$ unterscheidet.

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Wir nehmen an, er wäre nicht richtig. Dann gäbe es eine Umgebung $|x - x_0| \leqq \delta$ von x_0, auf der $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[m_n]{|P_{m_n}(x)|} < \frac{1-\varepsilon}{|t|}$ $(\varepsilon > 0)$ und wegen der Stetigkeit von $\frac{1}{t}$ können wir ε so klein wählen, dass $\frac{1-\varepsilon}{|t|} < \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{|t_0|}$ auf dieser Umgebung von x_0 ist. Dann muss aber die Reihe $\Sigma\, t_0^{m_n} P_{m_n}(x)$ ausser im Innern der Niveaukurve durch x_0 auch auf dieser Umgebung von x_0 absolut und gleichmässig konvergieren und daselbst eine reguläre analytische Funktion darstellen. Nach Satz XIII muss dann aber der Punkt t_0 ein Punkt regulären Verhaltens für die Funktion $\Sigma \left(\frac{t_0}{t}\right)^{m_n}$ sein. Dies ist aber ein Widerspruch, da für diese Funktion der Punkt t_0 singulärer Punkt ist. Damit ist aber die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.

Aus unserem Satz folgt nun ohne weiteres, dass die Reihe $\Sigma a_\nu P_\nu(x)$ ausserhalb der durch $\overline{\lim_\nu} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = |t|$ bestimmten Niveaukurve in einer überall dichten Menge von Punkten divergiert. Zur Divergenz ist hinreichend, dass $\overline{\lim_\nu} \sqrt[\nu]{|a_\nu P_\nu(x)|} > 1$. Es sei m_n eine solche Zahlenfolge, dass $\overline{\lim_n} \sqrt[m_n]{|a_{m_n}|} = |t|$ ist, x' ein Punkt (Bildpunkt t') ausserhalb der angegebenen Niveaukurve. Dann ist $\left|\frac{t}{t'}\right| > 1$. Entweder ist nun $\overline{\lim_n} \sqrt[m_n]{|P_{m_n}(x')|} = \frac{1}{|t'|}$, dann divergiert die Reihe in x' selbst, oder aber es gibt in der nächsten Umgebung Punkte x'' (t'') derart, dass $\overline{\lim_n} \sqrt[m_n]{|P_{m_n}(x'')|} > \frac{1-\varepsilon}{|t''|}$. Dabei ist wieder $\left|\frac{t}{t''}\right| > 1$ und ich kann ε so klein wählen, dass auch

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu P_\nu(x'')|} > \overline{\lim_n} \sqrt[m_n]{|a_{m_n} P_{m_n}(x'')|} > \frac{|t|}{|t'|} \cdot (1-\varepsilon) > 1$$

ist. Damit ist aber die Behauptung Fabers bewiesen.

Satz XV.

Die Reihe $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ divergiert ausserhalb der dem Kreis $|t| = \overline{\lim_\nu} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ entsprechenden Niveaukurve in einer überall dichten Menge von Punkten.

Wir brauchen uns, wie aus diesem Satz folgt, nur noch mit dem Verhalten von Reihen innerhalb der Gebiete absoluter und gleichmässiger Konvergenz zu beschäftigen, da ausserhalb dieser Gebiete die Reihen sich so verhalten, dass wir sie für die Reihenentwicklung analytischer Funktionen nicht verwerten können. Nehmen wir an, dass für eine Funktion F(x) — bezw. f(y) — zwei verschiedene Entwicklungen möglich sind:

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x) = \sum_0^\infty a'_\nu P_\nu(x),$$

$$f(y) = \sum_0^\infty b_\nu Q_\nu(y) = \sum_0^\infty b'_\nu Q_\nu(y),$$

so würde daraus die Existenz sog. Nullentwicklungen, d. h. von Reihen mit nicht verschwindenden Koeffizienten, die die Null darstellen, folgen:

$$0 = \sum_0^\infty{}_\nu (a_\nu - a'_\nu) P_\nu(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \alpha_\nu P_\nu(x),$$

$$0 = \sum_0^\infty{}_\nu (b_\nu - b'_\nu) Q_\nu(y) = \sum_0^\infty{}_\nu \beta_\nu Q_\nu(y).$$

Es ist nun unsere Aufgabe, zu untersuchen, ob solche Nullentwicklungen überhaupt möglich sind. Hierbei müssen wir die Werte der Integrale

$$J_{\nu\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int_C P_\nu(\zeta) Q_\mu(\zeta)\, d\zeta, \tag{40}$$

die Integration erstreckt über eine Niveaukurve von $z - \psi(t)$, kennen. $P_\nu(z)$ ist ein Polynom, also nur im Punkt Unendlich polar unstetig, $Q_\mu(z)$ ist ausserhalb der singulären Kurve überall regulär, das Integral ist also unabhängig vom Integrationsweg, wenn wir nur über eine die singuläre Kurve umschliessende Kurve integrieren.

$P_\nu(z) Q_\mu(z)$ ist, da $Q_\mu(z)$ im Punkte $z = \infty$ eine $\mu + 1$ fache Nullstelle hat, eine Funktion, deren Potenzreihenentwicklung bei $z = \infty$ mit $z^{\nu-\mu-1}$ beginnt. Ist nun $\nu \leqq \mu - 1$, so besitzt $Q_\mu(z)\, P_\nu(z)$ im Punkt Unendlich mindestens eine zweifache Nullstelle. Nachdem auf den Punkt $z = \infty$ ausgedehnten Residuensatz (vgl. Burkhardt, Analytische Funktionen, Seite 149) ist daher

$$J_{\nu\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int P_\nu(\zeta) Q_\mu(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (\nu < \mu).$$

Aus demselben Satz folgt

$$J_{\nu\nu} = \text{const.} \neq 0.$$

Um diese Konstante und $J_{\nu\mu}$ für $\nu > \mu$ zu bestimmen, bilden wir

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_\nu(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta - \sum_0^\infty{}_\mu P_\mu(x) \frac{1}{2\pi i}\int P_\nu(\zeta) Q_\mu(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \sum_0^\infty{}_\mu P_\mu(x)\, J_{\nu\mu}.$$

Wegen unseres ersten Resultats folgt daraus aber

$$P_\nu(x) = \sum_0^\nu {}_\mu J_{\nu\mu} P_\mu(x).$$

Wir greifen nun auf den Satz V zurück. Nach diesem ist jedes P_μ wirklich genau von dem Grad, den sein Index angibt. Nun kann aber zwischen Polynomen verschiedener Grade keine lineare homogene Relation bestehen und demnach muss sein

$$J_{\nu\nu} = 1, \qquad J_{\nu\mu} = 0 \qquad (\mu < \nu).$$

Satz XVI.

Die Integrale

$$(40) \qquad J_{\nu\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int P_\nu(\zeta) Q_\mu(\zeta)\, d\zeta$$

haben die Werte 0 und 1, je nachdem $\nu \neq \mu$ oder $\nu = \mu$ ist:

$$(41) \qquad J_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu, \\ 1 & \nu = \mu. \end{cases}$$

Es sei nun eine Nullentwicklung nach den P_ν oder Q_ν möglich

$$\sum \alpha_\nu P_\nu(x) = 0, \qquad \sum \beta_\nu Q_\nu(y) = 0.$$

Dann ist auch

$$\frac{1}{2\pi i} \int Q_\varkappa(\zeta) \sum \alpha_\nu P_\nu(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int P_\varkappa(\zeta) \sum \beta_\nu Q_\nu(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

die Integration erstreckt über eine die singuläre Kurve umschliessende Kurve im Konvergenzgebiet der Reihen. Da wir wegen der gleichmässigen Konvergenz gliedweise integrieren können, folgt aus dem Verschwinden der beiden Integrale

$$\alpha_\varkappa = 0, \qquad \beta_\varkappa = 0,$$

d. h. da $\varkappa$ beliebig war, alle Koeffizienten der beiden Nullentwicklungen sind notwendig identisch Null. Damit ist die Nichtexistenz von Nullentwicklungen dargetan.

Wir können für die Beziehung $J_{\nu\mu} \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ 1 & \nu = \mu \end{cases}$ noch einen zweiten äusserst einfachen Beweis geben. Es sei

$$\sum_0^\infty {}_\nu \beta_\nu Q_\nu(y) = 0.$$

Dann ist auch

$$\lim_{y=\infty}(y\sum_{0}^{\infty}\beta_\nu Q_\nu(y))=\beta_0=0,$$

$$\lim_{y=0}(y^2\sum_{1}^{8}\beta_\nu Q_\nu(y))=\beta_1=0, \quad \text{u. s. w.}$$

Wir finden so direkt, dass nach den $Q_\nu(y)$ keine Nullentwicklungen möglich sind. Nun ist, wenn wir im negativen Sinn um den Punkt Unendlich herumintegrieren:

$$Q_\mu(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{Q_\mu(\zeta)}{y-\zeta}d\zeta=\sum_{0}^{\infty}{}_\nu J_{\nu\mu}Q_\nu(y).$$

Da aber nach den Q keine Nullentwicklungen möglich sind, folgert man hieraus sofort

$$J_{\nu\mu}=\begin{cases}0 & \nu\neq\mu,\\ 1 & \nu=\mu,\end{cases}$$

und beweist die Nichtexistenz von Nullentwicklungen nach den P_ν wie vorhin.

Satz XVII.

Weder die Reihen nach den P_ν noch die nach Q_ν lassen Nullentwicklungen zu; jede Funktion kann also nur auf eine einzige Art nach P_ν und Q_ν entwickelt werden, wenn eine solche Entwicklung überhaupt möglich ist.

Nur eine andere Form dieses Satzes ist folgender Satz:

Satz XVIII.

Auf der Konvergenzgrenze einer Reihe nach $P_\nu(x)$ liegt stets ein singulärer Punkt der dargestellten Funktion; auf der Konvergenzgrenze der Reihen nach $Q_\nu(y)$ liegt stets ein singulärer Punkt der dargestellten Funktion oder ein singulärer Punkt der Umkehrfunktion $t=q(z)$ von $z=\psi(t)$.

Alle unsere Resultate beziehen sich nur auf den Fall, dass $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}=|t|$ einen Kreis definiert, zu dem eine Niveaukurve gehört, die Fälle, in denen (wenn wir die Zuord-

nung der singulären Kurve zum Einheitskreis beibehalten) $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \geq 1$ ist, sind der Untersuchung durch unsere Methode ganz unzugänglich. Auch Faber geht auf sie nicht ein. Da diese Reihen nur innerhalb der singulären Kurve konvergieren können, haben sie auch wenig Interesse für uns.

§ 8. Polynomfolgen, welche Nullentwicklungen zulassen.

Wir haben vorausgesetzt, dass beide Faktoren φ_1 und φ_2, in die (vergl. Formel (10), Seite 29) $-\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)}$ zerspalten wurde, im Einheitskreis stetig bleiben sollten. Können wir diese Voraussetzung fallen lassen? Was folgt aus einer Unstetigkeit der Faktoren und welche Arten von Singularitäten sind überhaupt zulässig?

Einmal soll das Produkt der beiden Faktoren wieder im Einheitskreis stetig sein. Die Unstetigkeiten sind also nur bei einer der beiden Funktionen willkürlich. Dann müssen wir auch beachten, dass unser Ausgangspunkt, an dem wir festhalten müssen, die Entwicklung der erzeugenden Funktion der Polynome nach positiven ganzen Potenzen von t war. Setzen wir

$$\frac{-t\psi'(t)}{\psi(t)} = \bar{\varphi}_1(t) \cdot \bar{\varphi}_2(t) \tag{42}$$

so ist genau wie früher;

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \bar{\varphi}_1(\tau)\, f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \cdot f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) \bar{\varphi}_2(\tau)\, d\tau .$$

Eine Unstetigkeit im Punkte $t = 0$ kann nur polar sein, da sonst die Reihenentwicklung von $\varphi_2(t)\, f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ in einer brauchbaren Form, die auf Polynome führt (vergl. Seite 7), nicht möglich wäre. Ist nun $\varphi_2(t) = t^\varkappa \varphi_2(t)$, also $\bar{\varphi}_1(t) = t^{-\varkappa}\varphi_1(t)$ ($\varkappa$ eine positive oder negative ganze Zahl), so ändert sich, wie man sofort sieht, an der ganzen Theorie nichts, ausser dass $P_\nu(x)$ nicht der Koeffizient von t^ν sondern von $t^{\nu+\varkappa}$ in seiner erzeugenden Funktion ist, und dass $Q_\nu(y)$ nicht mehr der Koeffizient von $t^{-\nu}$ sondern von $t^{-(\nu+\varkappa)}$ in der Laurentschen Reihe für $\varphi_1(t)\, f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ ist. Weder an der Form von

$P_\nu(x)$, noch an der von $Q_\nu(y)$ ändert sich das geringste. Es ist also keine Einschränkung, wenn wir $\bar{\varphi}_1(t)$ und $\bar{\varphi}_2(t)$ immer an der Stelle $t = 0$ stetig voraussetzen.

Wir nehmen daher an, $t = 0$ sei weder für $\bar{\varphi}_1(t)$ noch für $\bar{\varphi}_2(t)$ eine singuläre Stelle und betrachten zuerst die Wirkungen des Singulärwerdens von $\bar{\varphi}_2(t)$. Es sei α die singuläre Stelle von $\bar{\varphi}_2(t)$ vom kleinsten absoluten Betrage: $\bar{\varphi}_2(t)$ regulär für $|t| < |\alpha| \leqq 1$. Dann bleibt die Potenzreihenentwicklung von $\bar{\varphi}_2(t) f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ gültig, und sie konvergiert, wenn $|u|$ die nach unserer Festsetzung (s. Seite 28) dem Punkte x zugeordnete Zahl ist, im Kreise $|t| < |u|$ oder im Kreise $|t| < |\alpha|$, je nachdem $|u| < |\alpha|$ oder $|u| \geqq |\alpha|$ ist. Vergleichen wir dieses Verhalten mit den früher festgestellten Tatsachen, so können wir kurz zusammenfassend sagen:

Satz XIX.

Unstetigkeiten von $\bar{\varphi}_2(t)$ vergrössern den Minimalbereich. Die Stelle, die in der Theorie bisher die singuläre Kurve einnahm, nimmt jetzt die Niveaukurve, deren Bildkreis $|t| = |\alpha|$ ist, ein.

Damit ist aber alles auf den von uns besprochenen Fall zurückgeführt, wenn wir darauf bestehen, Polynome zu erhalten. Ist $\bar{\varphi}_2(t)$ im Ring $|\alpha| < |t| < 1$ eindeutig und stetig, so können wir $\bar{\varphi}_2(t) \cdot f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ auch im Ring $|\alpha| < |t| < |u|$ entwickeln für gewisse Punkte x. Die so erzeugten Funktionen von x sind aber keine Polynome und wir wollen daher nicht näher auf sie eingehen.

Unstetigkeiten von $\bar{\varphi}_2(t)$ lehren uns, wie wir gesehen haben, nichts prinzipiell neues. Es bleibt also nur der Fall übrig, dass $\bar{\varphi}_2(t)$ selbst stetig bleibt, $\bar{\varphi}_1(t)$ aber unstetig wird. Da $\bar{\varphi}_2(t)$ regulär bleiben soll, sind diese Unstetigkeiten notwendig Pole.

Wird $\bar{\varphi}_1(t)$ polar unstetig, so bleiben alle Schlüsse zu Beginn des § 4 richtig, bis zu der Stelle, an der die Funktion $\frac{-t\psi'(t)}{\psi(t)}$ in zwei Faktoren zerspalten wird. Wir be-

halten alle früheren Bezeichnungen bei und knüpfen an Formel 8 an. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, $\varphi_1(t)$ besitze nur einen einzigen Pol von der Vielfachheit n. Der Fall mehrerer Pole kann ganz ebenso behandelt werden, deshalb ist unsere Einschränkung nicht wesentlich. Wir können jetzt setzen

$$\bar{\varphi}_1(t) \quad (t-\alpha)^{-n}\varphi_1(t),$$

$$\bar{\varphi}_2(t) = (t-\alpha)^n \varphi_2(t),$$

(n positiv ganz) und $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ sind im Innern des Einheitskreises stetige nicht verschwindende Funktionen.

Die Kreise $|t| = \text{const.}$ und damit die ihnen entsprechenden Niveaukurven zerfallen nun in zwei Klassen. Nennen wir die Niveaukurve, welche dem Kreis $|t| = |\alpha|$ durch den singulären Punkt α von $\varphi_1(t)$ entspricht, C_α, so umfasst die erste Klasse die Kurven, die C_α umschliessen, für die also $|t| = r_1 < |\alpha|$ ist, und die zweite Klasse die Niveaukurven zwischen der singulären Kurve und C_α mit den Bildkreisen $1 > |t| = r_2 > |\alpha|$.

$(t-\alpha)^n \cdot \bar{\varphi}_1(t) \cdot f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ ist eine eindeutige und stetige Funktion in dem Kreisring $|v| < |t| < 1$. Wir müssen nun zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden: $|v < \alpha|$ und $|\alpha| < |v|$. Im ersten Fall ist $\bar{\varphi}_1(t)\, f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ eindeutig und stetig in den beiden Kreisringen $|v| < |t| < |\alpha|$ und $|\alpha| < |t| < 1$ und daher in beiden in eine Laurentsche Reihe entwickelbar, im zweiten Fall dagegen existiert nur eine einzige solche Entwicklung in dem Ring $|v| < |t| < 1$. Im ersten Fall muss y auf einer Niveaukurve der ersten, im zweiten auf einer Niveaukurve der zweiten Klasse liegen.

Wir entwickeln jetzt $\bar{\varphi}_2(t)\, f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right)$ nach ganzen positiven Potenzen von t. Der Koeffizient von t^ν ist dann ein Polynom ν Grades, das wir zum Unterschied von unseren früheren Polynomen $\Pi_\nu(x)$ nennen wollen. Die $\Pi_\nu(x)$ sind demnach definiert durch

$$\bar{\varphi}_2(t)\, f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = \sum_0^\infty {}_\nu \Pi_\nu(x)\, t^\nu. \tag{43}$$

Da $\overline{\varphi}_2(t) = (t-\alpha)^n \varphi_2(t)$ ist, und

$$\varphi_2(t)\, f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = \sum_0^\infty {}_\nu P_\nu(x) t^\nu$$

war, folgt, dass $\Pi_\nu(x)$ eine lineare Kombination von $P_\nu(x)$, $P_{\nu-1}(x) \ldots P_{\nu-n}(x)$ ist. Damit ist aber schon gezeigt, dass $\Pi_\nu(x)$ ein Polynom und wieder genau vom Grade ν ist. Die Reihe (43) konvergiert für $|t| < |u|$ und daraus folgt

$$\overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|\Pi_\nu(x)|} = \frac{1}{|u|}$$

und die den Relationen (18), (19) analogen Ungleichungen, die wir auch aus der Integraldarstellung von $\Pi_\nu(x)$ (als Koeffizient von t^ν in der Reihe (43)) hätten erhalten können.

$$(44) \qquad \Pi_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\overline{\varphi}_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)}{\tau^{\nu+1}} d\tau$$

Nun gilt für $\frac{1}{y-x}$ die Darstellung

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \overline{\varphi}_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \cdot \overline{\varphi}_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) \frac{d\tau}{\tau \cdot y}.$$

Setzen wir in dies Integral die Reihe (43) ein, so dürfen wir gliedweise integrieren und erhalten

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty {}_\nu \Pi_\nu(x) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \overline{\varphi}_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \tau^{\nu-1} \frac{d\tau}{y}.$$

Hier müssen verschiedene Fälle unterschieden werden. Wie wir früher gesehen haben, konnten wir für r irgend einen Kreis nehmen, der zwischen dem Kreise vom Radius $|u|$ und $|v|$ verlief. Liegen nun x und y beide ausserhalb C_α, so ist (r) sicher ein Kreis (r_1) der ersten Klasse, liegen sie beide innerhalb C_α, so ist (r) ein Kreis (r_2) der zweiten Klasse. Werden aber x und y von C_α getrennt, so kann (r) ebensogut ein Kreis der ersten wie der zweiten Klasse sein, und da zwischen zwei Kreisen verschiedener Klassen stets der Pol α von $\overline{\varphi}_1(t)$ liegt, erhalten wir in dem Fall, dass x und y durch C_α getrennt werden, zwei verschiedene

Reihenentwicklungen für $\frac{1}{y-x}$. Durch die Integrale

$$O_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r_1)} \varphi_1(\tau) f_2\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \tau^{\nu-1} \frac{d\tau}{y}, \tag{45}$$

$$\Omega_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r_2)} \varphi_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \tau^{\nu-1} \frac{d\tau}{y} \tag{46}$$

werden daher zwei verschiedene Funktionensysteme $O_\nu(y)$ und $\Omega_\nu(y)$ definiert. Es ist dabei vorausgesetzt, dass $|v| < r_1$ bezw. $|v| < r_2$ ist. Mit diesen beiden Funktionensystemen können wir $\frac{1}{y-x}$ in der Form darstellen

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty \Pi_\nu(x) O_\nu(y), \tag{47}$$

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty \Pi_\nu(y) \Omega_\nu(y). \tag{48}$$

Je nach der Lage von x und y zu C_α gelten entweder beide oder nur eine der Darstellungen. Betrachten wir die Integrale (45) und (46), so sehen wir, dass $O_\nu(y)$ und $\Omega_\nu(y)$ in dem Fall, in dem beide zugleich definiert sind, nämlich für $|v| < \alpha|$ nichts anderes sind, als die Koeffizienten von $t^{-\nu}$ in den beiden Laurentschen Entwicklungen, die dann für $\varphi_1(t) f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)$ möglich sind. Ist $|v| > \alpha|$, so ist nur eine Laurentsche Entwicklung möglich mit $\Omega_\nu(y)$ als Koeffizienten von $t^{-\nu}$.

Wir haben hier einen wichtigen Unterschied gegen früher zu konstatieren, es existieren mehrere Systeme von zugeordneten Funktionen. Für beide Systeme $O_\nu(y)$ und $\Omega_\nu(y)$ können wir genau wie für die $Q_\nu(y)$ die den Formeln (21), (22) und (23) entsprechenden Beziehungen aufstellen. Die $O_\nu(y)$ sind für alle y ausserhalb von C_α definiert, die $\Omega_\nu(y)$ für alle y ausserhalb der singulären Kurve; dass auf C_α stets eine singuläre Stelle von $O_\nu(y)$ liegt, werden wir später sehen, wir wollen hier nur die für eine Umgebung des unendlich fernen Punktes giltigen Potenzreihenentwicklungen beider Funktionen betrachten. Setzen wir wie schon

oben $\bar{\varphi}_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{(t-\alpha)^n}$, so kann der Integrand in den beiden Integralen (45) und (46) auch geschrieben werden:

$$\frac{1}{y}\bar{\varphi}_1(t) f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right) t^{\nu-1} = \varphi_1(t) \sum b_\varkappa \frac{(\psi(t))^\varkappa t^{\nu-1}}{(t-\alpha)^n} \frac{1}{y^{\varkappa+1}} .$$

Für $O_\nu(y)$ ist die Integrationskurve ein Kreis (r_1) und $r_1 < |\alpha|$. In diesem Fall wird der Koeffizient von $y^{\varkappa+1}$ höchstens für $t=0$ unstetig und wenn wir wie früher setzen

$$\psi(t) = \frac{a+t\cdot\mathfrak{P}(t)}{t}$$

so sehen wir, dass dies nur eintritt für $\varkappa \geqq \nu$. D. h. aber, wenn wir unseren Schluss von Seite 39 wiederholen, $O_\nu(y)$ hat im Punkte $y=\infty$ eine $\nu+1$-fache Nullstelle. Von den $\Omega_\nu(y)$ kann man offenbar eine solche Eigenschaft nicht behaupten, wir werden später hierauf zurückkommen. Wir können bis jetzt nur sagen, dass alle $\Omega_\nu(y)$ in $y=\infty$ mindestens von der ersten Ordnung verschwinden.

Satz XX.

Zerspalten wir $\frac{-t\psi'(t)}{\psi(t)}$ so in zwei Faktoren $\bar{\varphi}_1(t)$ und $\bar{\varphi}_2(t)$, dass $\bar{\varphi}_1(t)$ bei $t=\alpha$ einen Pol n. Ordnung hat, im übrigen aber im Einheitskreis stetig bleibt und nicht verschwindet, so definiert die Reihe

$$\bar{\varphi}_2(t) f_2\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) = \sum_0^\infty \Pi_\nu(x) t^\nu \tag{43}$$

ein System von Polynomen $\Pi_\nu(x)$. Für diese Polynome gilt auch die Integraldarstellung

$$\Pi_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{\bar{\varphi}_2(\tau) f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) d\tau}{\tau^{\nu+1}} . \tag{44}$$

Sind $r_1 = |t|$ und $r_2 = |t|$ zwei Kreise, die durch den Punkt α getrennt werden, $r_1 < |\alpha| < r_2$, so definieren die Integrale

$$O_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r_1)} \bar{\varphi}_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right) \tau^{\nu-1} \frac{d\tau}{y}, \tag{45}$$

(46) $$\Omega_\nu(y) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(r_2)} \bar{\varphi}_1(\tau) f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right)\tau^\nu \frac{1}{y}\,d\tau,$$

zwei Funktionensysteme und es bestehen für $\frac{1}{y-x}$ die beiden Reihenentwicklungen

(47) $$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty {}_\nu \Pi_\nu(x) O_\nu(y),$$

(48) $$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty {}_\nu \Pi_\nu(x) \Omega_\nu(y);$$

diese gelten gleichzeitig, wenn y ausserhalb, x innerhalb der dem Kreise $|t| = |\alpha|$ entsprechenden Niveaukurve C_α liegt; liegen sowohl x wie y innerhalb C_α so gilt nur die zweite Entwicklung, liegen sie beide ausserhalb C_α nur die erste. $O_\nu(y)$ ist nur für die y ausserhalb C_α definiert und besitzt im Punkte Unendlich eine $\nu+1$-fache Nullstelle, die $\Omega_\nu(y)$ dagegen sind definiert für alle y ausserhalb der singulären Kurve. Es lassen sich weiter endliche Konstanten M, m, m' so bestimmen, dass die Ungleichungen gelten

(49) $$|\Pi_\nu(x)| \leqq \frac{M}{(|u_0|-\delta)^\nu}, \qquad |u| > |u_0|,$$

(50) $$|O_\nu(y)| \leqq m(|v_0|+\delta')^\nu \qquad |v| < |v_0| < |\alpha|,$$

(51) $$|\Omega_\nu(y)| \leqq m'(|v_0|+\delta'')^\nu \qquad |\alpha| < |v_0| < 1, \quad |v| < |v_0|,$$

und

(52) $$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|\Pi_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{|u|},$$

(53) $$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|O_\nu(y)|} \leqq |v|, \qquad |v| < |\alpha|,$$

(54) $$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|\Omega_\nu(y)|} \leqq |v|, \qquad |\alpha| < |v| < 1.$$

Aus den Ungleichungen (49), (50) und (51) können wir genau so wie früher (vergl. Seite 36) den Schluss auf die

gleichmässige und absolute Konvergenz der Reihen (47) und (48) ziehen.

Wir erhalten so den Satz

Satz XXI.

Die Reihe

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} \Pi_{\nu}(x) O_{\nu}(y) \tag{47}$$

konvergiert absolut und gleichmässig in beiden Variabeln, wenn wir eine Niveaukurve ausserhalb C_{α} geben und x und y auf abgeschlossene Gebiete innerhalb bezw. ausserhalb dieser Kurve beschränken. Entsprechend konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} \Pi_{\nu}(x) \Omega_{\nu}(y) \tag{48}$$

absolut und gleichmässig in beiden Variabeln, wenn wir x und y auf abgeschlossene Gebiete innerhalb und ausserhalb einer Niveaukurve, die kleiner als C_{α} ist, beschränken.

Es kann unsere Aufgabe nicht sein, alle Sätze, die von den P_{ν} und Q_{ν} gelten, auf unsere neuen Funktionensysteme zu übertragen. Wir können ganz genau so wie im vorigen Paragraphen zu den Reihenentwicklungen beliebiger analytischer Funktionen nach unsern Polynomen und zugeordneten Funktionen übergehen. Wesentlich ist nur die Aenderung, die Satz XIII erleidet. Wie man leicht zeigt, lautet er jetzt: Die Singularitäten der Funktion $\Sigma a_{\nu} t^{-\nu}$ sind die Bildpunkte der Singularitäten der Funktion $\Sigma a_{\nu} \Pi_{\nu}(x)$ und unter Umständen ausserdem noch der Punkt $t = \alpha$. Diese Aenderung, so unscheinbar sie ist, ist sehr wichtig, sie lässt uns schon ahnen, dass jetzt Nullentwicklungen möglich sind. Früher musste auf der Konvergenzgrenze unserer Polynomreihe stets ein singulärer Punkt der dargestellten Funktion liegen, das ist jetzt offenbar nicht mehr notwendig, jetzt kann die Konvergenzgrenze auch C_{α} sein. Der Beweis, dass unsere Reihen ausserhalb der durch $\lim \sqrt[\nu]{|a_{\nu}|} = |t|$ bestimmten Niveaukurven

in einer überall dichten Menge von Punkten divergieren, lässt sich auch hier wieder unschwer führen. Betrachten wir nur solche Reihen für die $\lim_{\nu} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < |\alpha|$ ist, so ist für $\Sigma \frac{a_\nu}{t^\nu}$ der Punkt α sicher ein Punkt regulären Verhaltens. Für diese Reihen können wir also den Eindeutigkeitsbeweis genau wie oben führen, sie lassen keine Nullentwicklungen zu, ebensowenig auch die Reihen nach den $O_\nu(y)$. Auch alle anderen Sätze übertragen sich ohne weiteres, und wir erhalten den Satz

Satz XXII.

Beschränken wir y auf das Aussengebiet von C_α, so gelten alle Sätze, die wir über die $P_\nu(x)$ und $Q_\nu(y)$ abgeleitet haben, auch für die $\Pi_\nu(x)$ und $O_\nu(y)$. Insbesondere gilt auch der Satz: „Konvergiert eine Reihe $\Sigma a_\nu \Pi_\nu(x)$ über die Kurven C_α hinaus, so gibt es keine ebensolche Reihe mit anderen Koeffizienten, die dieselbe Funktion darstellt." Bei der Uebertragung der Sätze von den P_ν und Q_ν auf die Π_ν und O_ν ist immer „singuläre Kurve" durch „C_α" und „Minimalbereich" durch „C_α mit Innengebiet" zu ersetzen.

Da die Reihen (47) und (48) für alle x und y, für die sie gleichzeitig gelten, absolut und gleichmässig konvergieren, können wir sie gliedweise subtrahieren und erhalten:

Satz XXIII.

Liegt x innerhalb, y ausserhalb C_α, so gilt die Beziehung

$$0 = \sum_0^\infty {}_\nu (O_\nu(y) - \Omega_\nu(y)) \Pi_\nu(x). \tag{55}$$

Auch diese Reihe konvergiert absolut und gleichmässig in beiden Variabeln, wenn wir diese geeignet beschränken.

Die Existenz von Nullentwicklungen nach den $\Pi_\nu(x)$ mit der Konvergenzgrenze C_α ist damit festgestellt, und zwar von unendlich vielen solchen Nullentwicklungen, da

jedem gegebenen Wert von y eine andere entspricht. Wir wollen zunächst zeigen, dass alle diese unendlich vielen Nullentwicklungen lineare Kombinationen von n speziellen sind.

Bevor wir unsere Behauptung beweisen, müssen wir noch einiges über die Funktionen $\Omega_\nu(y)$ sagen. Wir tun dies, indem wir die $\Omega_\nu(y)$ für die y ausserhalb C_α auf die $O_\nu(y)$ zurückführen. Die $O_\nu(y)$ und $\Omega_\nu(y)$ waren durch Integrale über dieselbe Funktion definiert, zwischen den Integrationskurven aber lag ein n-facher Pol des Integranden. Bezeichnen wir den von beiden Integrationskurven gebildeten Ring mit (k) und setzen wir wie oben $\varphi_1(t) \quad (t-\alpha)^n \varphi_1(t)$, so können wir schreiben

$$\Omega_\nu(y) - O_\nu(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(k)} \frac{1}{y}\varphi_1(\tau)\, f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right)\tau^{\nu-1}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(k)} \frac{1}{y}\frac{\varphi_1(\tau)\, f_1\left(\frac{\psi(\tau)}{y}\right)\tau^{\nu-1}}{(\tau-\alpha)^n}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{1}{y}\cdot\varphi_1(t) f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)t^{\nu-1}\right)\right]_{t=\alpha}$$

$$= \underset{\text{Funktion}}{\text{Lineare}}\left\{ f_1\left(\frac{\psi(\alpha)}{y}\right), f_1'\left(\frac{\psi(\alpha)}{y}\right), \ldots f_1^{(n-1)}\left(\frac{\psi(\alpha)}{y}\right)\right\}.$$

$\psi(\alpha)$ ist der Punkt auf C_α, dessen Bildpunkt α ist, wir sehen so, da $f_1(z)$ und seine Ableitungen für $z=1$ singulär werden, dass $O_\nu(y)$ auf C_α im Punkte $y=\psi(\alpha)$ singulär wird, wie $f_1(z)$ und seine $n-1$ ersten Ableitungen im Punkte $z=1$. Ausserdem folgt aus der Formel, dass alle $\Omega_\nu(y)$, höchstens n—1 ausgenommen, im Punkte $y=\infty$ wirklich nur von der ersten Ordnung Null ist, denn der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ in der Potenzreihenentwicklung von $\Omega_\nu(y) - O_\nu(y)$ ist, wie aus unserer letzten Formel folgt, eine lineare Funktion der n ersten Koeffizienten $b_0\ b_1 \ldots . b_{n-1}$ der Potenzreihe für $f_1(z)$:

$$A_0\, b_0 + A_1\, b_1 + \ldots . + A_{n-1}\, b_{n-1}$$

und zwar sind die A_λ Polynome in ν vom Grade $n-\lambda-1$. Da alle b_λ von Null verschieden sind und ein Polynom nur dann identisch verschwindet, wenn alle Koeffizienten verschwinden, ist unsere Behauptung richtig.

Satz XXIV.

Es ist

$$(56)\quad \Omega_\nu(y) - O_\nu(y) \quad \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{1}{y}\varphi_1(t) f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right) t^{\nu-1}\right)\right]_{t=\alpha}.$$

Die Funktion $O_\nu(y)$ wird also auf der Kurve C für $y = \psi(\alpha)$ unstetig und zwar wie eine lineare Funktion von $f_1(z)$ und seinen $n-1$ ersten Ableitungen im Punkte $z = 1$. Die Formel zeigt auch, dass wenigstens alle $\Omega_\nu(y)$, deren Index $\nu \geq n$ ist, im Punkte Unendlich nur von der ersten Ordnung verschwinden.

Es war $\varphi_2(t) = (t-\alpha)^n \varphi_2(t)$ ein Faktor der erzeugenden Funktion unserer Polynome, diese besitzt also an der Stelle $t = \alpha$ eine n-fache Nullstelle. Deshalb müssen dort auch ihre $n-1$ ersten Ableitungen nach t verschwinden. Wir erhalten so die n Nullentwicklungen

$$\begin{aligned}
0 &= \Sigma \alpha^\nu \Pi_\nu(x) = N_1,\\
0 &= \Sigma \nu \alpha^{\nu-1} \Pi_\nu(x) = N_2,\\
0 &= \Sigma \nu(\nu-1)\alpha^{\nu-2} \Pi_\nu(x) = N_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= \Sigma \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-n+2)\alpha^{\nu-n+1} \Pi_\nu(x) = N_n.
\end{aligned} \tag{57}$$

Die Nullentwicklungen (57) sind dieselben, die Faber (Polynomische Entwicklungen II, Seite 130) angibt.

Betrachten wir die rechte Seite von (56), so sehen wir, dass sie sich linear mit von ν unabhängigen Koeffizienten aus t^ν und seinen $n-1$ ersten Ableitungen genommen an der Stelle α, d. h. aus α^ν, $\nu\alpha^{\nu-1}$, ..., $\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+2)\alpha^{\nu-n+1}$ zusammensetzt, also eine von ν unabhängige lineare Funktion der Koeffizienten von $\Pi_\nu(x)$ in den Reihen (57) ist. Damit ist aber gezeigt, dass sich die rechte Seite von (55) linear aus den n Nullentwicklungen (57) zusammensetzen lässt. Das war aber gerade, was wir behauptet hatten.

Wir wollen jetzt aber noch viel mehr beweisen, einmal: das System (57) ist ein linear unabhängiges System von Nullentwicklungen, kann also nicht durch ein kleineres System

ersetzt werden, dann: das System ist ein vollständiges System, d. h. jede überhaupt mögliche Nullentwicklung lässt sich aus den $N_1, N_2, \ldots N_n$ linear zusammensetzen.

Wir nennen unser System (57) linear unabhängig, wenn es keine n von Null verschiedene Konstanten $m_1, m_2, \ldots m_n$ gibt, derart, dass in der Nullentwicklung

$$N = m_1 N_1 + m_2 N_2 + \ldots + m_n N_n$$

die Koeffizienten aller Π_ν identisch verschwinden. Setzen wir

$$m_1 = m_1', \; m_2 = \alpha m_2', \; \ldots, \; m_n = \alpha^{n-1} m_n',$$

so ist der Koeffizient von Π_ν in N gleich

$$\alpha^\nu (m_1' + \nu m_2' + \nu(\nu-1) m_3' + \ldots + \nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+2) m_n').$$

Da α^ν nicht verschwindet, müsste die Klammer für jedes ν verschwinden, wenn eine Abhängigkeit zwischen den $N_\varkappa$ bestände. Die Klammer ist aber ein Polynom vom Grade $n-1$ in ν, um die Klammer für alle ν zum Verschwinden zu bringen, müssten deshalb alle $m_\varkappa$ Null sein.

Satz XXV.

Das gefundene System (57) von Nullentwicklungen ist ein linear unabhängiges System; alle diese Nullentwicklungen haben die Konvergenzgrenze C_α.

Wir müssen jetzt nur noch die Vollständigkeit unseres Systems von Nullentwicklungen beweisen. Faber führt den Beweis in zwei Schritten aus. Er zeigt zuerst, wie man den allgemeinen Fall zurückführen kann auf die Untersuchung der Nullentwicklungen nach den zum Kreis und der identischen Transmutation gehörigen Polynomen $\Pi_\nu(x)$, um dann für diese speziellen Polynome den Beweis unter Benutzung einiger spezieller Eigenschaften, die sie auszeichnen, zu führen. Er macht dabei auch von den am Anfang des Paragraphen besprochenen Verallgemeinerungen Gebrauch.

Einen Vollständigkeitsbeweis eines Systems von Nullentwicklungen, der auf ganz anderen Prinzipien beruht, als der Fabers, hat Frobenius schon 1871[1]) geführt. Dieser Beweis lässt sich nun mit einigen Modifikationen sofort

[1]) Frobenius, a. a. O., Seite 26 ff.

auf unsere Reihen übertragen, wie die Durchführung zeigen soll.[1])

Wir müssen für unseren Beweis den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \Omega_\mu(\zeta)\,\Pi_\nu(\zeta)\,d\zeta \tag{58}$$

kennen, erstreckt über eine Niveaukurve. Da im ganzen Gebiet ausserhalb der singulären Kurve der Integrand höchstens im Punkt $z=\infty$ unstetig wird, hat das Integral denselben Wert, was für eine Niveaukurve wir auch wählen. Es sei nun C eine C_α umschliessende Niveaukurve. Dann können wir für $\Omega_\mu(y)$ den aus (56) folgenden Ausdruck einsetzen. Da wir unsere Sätze über die P_ν und Q_ν auf die Π_ν und O_ν ohne wesentliche Aenderung übertragen konnten, ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Pi_\nu(\zeta)\,O_\mu(\zeta)\,d\zeta = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu, \\ 1 & \nu = \mu. \end{cases} \tag{59}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Pi_\nu(\zeta)\,\Omega_\mu(\zeta)\,d\zeta \tag{60}$$

$$\frac{1}{2\pi i\,(n-1)!}\int \Pi_\nu(\zeta)\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\varphi_1(t)f_1\left(\frac{\psi(t)}{\zeta}\right)\frac{t^{\mu-1}}{\zeta}\right)\right]_{t=\alpha} d\zeta,$$

wenn $\nu \neq \mu$. Für $\nu = \mu$ ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Pi_\mu(\zeta)\,\Omega_\mu(\zeta)\,d\zeta = \tag{60}$$

$$1 + \frac{1}{2\pi i\,(n-1)!}\int \Pi_\mu(\zeta)\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\varphi_1(t)f_1\left(\frac{\psi(t)}{\zeta}\right)\frac{t^{\mu-1}}{\zeta}\right)\right]_{t=\alpha} d\zeta.$$

Um die auf der rechten Seite auftretenden Integrale auf eine brauchbare Form zu bringen, benutzen wir die Formel

$$\frac{d^m(\varphi\cdot\psi)}{dx^m} = \sum_0^m \binom{m}{\lambda}\varphi^{(m-\lambda)}(x)\cdot\psi^{(\lambda)}(x).$$

[1]) Benutzt man die Tatsache, dass die Faberschen Reihen gliedweise transmutiert werden können, der Beweis also nur für $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ geführt zu werden braucht, so gestaltet sich die Uebertragung noch etwas einfacher.

Nach dieser Formel ist

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\varphi_1(t) f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)\frac{t^{\mu-1}}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{y}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{\lambda}\frac{d^{n-\lambda-1}}{dt^{n-\lambda-1}}\left(\frac{\varphi_1(t)}{t} f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)\right)\cdot\frac{d^\lambda t^\mu}{dt^\lambda}.$$

Setzen wir jetzt

$$S_\nu^{(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i(n-1)!}\binom{n-1}{\lambda}\int\frac{\Pi_\nu(\zeta)}{\zeta}\left[\frac{d^{n-\lambda-1}}{dt^{n-\lambda-1}}\left(\frac{\varphi_1(t)}{t} f_1\left(\frac{\psi(t)}{\zeta}\right)\right)\right]_{t=\alpha} d\zeta,$$

so lassen sich die Integrale auf der rechten Seite von (60) mit Hilfe unserer Formel in die Form bringen

$$\sum S_\nu^{(\lambda)}\left[\frac{d^\lambda t^\mu}{dt^\lambda}\right]_{t=\alpha}=\sum^\lambda \mu(\mu-1)\dots(\mu-\lambda+1)\,\alpha^{\mu-\lambda} S_\nu^{(\lambda)}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \Pi_\nu(\zeta)\,\Omega(\zeta)\,d\zeta-\sum_0^{n-1}{}^\lambda \mu(\mu-1)\dots(\mu-\lambda+1)\,\alpha^{\mu-\lambda} S_\nu^{(\lambda)}$$

(60′)

$$=\begin{cases}0 & \nu\neq\mu,\\ 1 & \nu=\mu.\end{cases}$$

Es sei nun

(61)
$$0=\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \Pi_\nu(x)$$

eine Nullentwicklung, deren Konvergenzgebiet über die singuläre Kurve hinausreicht. Diese Reihe muss dann nach unseren Sätzen auch gleichmässig konvergent sein. Deshalb können wir mit Ω_μ multiplizieren und gliedweise integrieren. Da das Integral in (60′) unabhängig von der speziellen Niveaukurve ist, über die es erstreckt wird, so erhalten wir

$$0=C_\mu+\sum_0^\infty{}^\nu\sum_0^{n-1}{}^\lambda C_\nu S_\nu^{(\lambda)}\mu(\mu-1)\dots(\mu-\lambda+1)\,\alpha^{\mu-\lambda}.$$

Wenn wir zunächst rein formal rechnen — der Nachweis, dass alle vorgenommenen Operationen erlaubt sind, soll später erbracht werden —, so können wir die beiden Summationen vertauschen. Dies ergibt

$$C_\mu=-\sum_0^{n-1}{}^\lambda \mu(\mu-1)\dots(\mu-\lambda+1)\,\alpha^{\mu-\lambda}\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu S_\nu^{(\lambda)}.$$

Führen wir die Bezeichnung

$$-\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} C_\nu S_\nu^{(\lambda)} = \gamma_\lambda$$

ein, so ergibt sich

$$C_\mu = \sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda} \gamma_\lambda \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda+1)\alpha^{\mu-\lambda}. \tag{62}$$

Unsere Nullentwicklung (61) ist also übergeführt in die Form

$$\begin{aligned}\Sigma C_\mu \Pi_\mu(x) &= \gamma_0 \Sigma \alpha^\mu \Pi_\mu(x) + \gamma_1 \Sigma(\mu-1)\alpha^{\mu-1}\Pi_\mu(x) + \ldots . \\ &\ldots . + \gamma_{n-1}\Sigma\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)\alpha^{\mu-n+1}\Pi_\mu(x).\end{aligned} \tag{62'}$$

Betrachten wir nun die auf der rechten Seite auftretenden n Summen, so sehen wir, dass jede eine der Nullentwicklungen $N_\varkappa$ von (57) ist. Damit ist aber der Vollständigkeitsbeweis erledigt, wenn wir noch zeigen, dass die Umordnungen, die wir mit der Reihe für C_ν vorgenommen haben, erlaubt sind. Dazu genügt der Nachweis der absoluten Konvergenz dieser Reihe, oder auch der Reihe unter Weglassung der n ersten Glieder; n bedeutet hier wie immer die Vielfachheit des Poles von $\varphi_1(t)$. Wir brauchen hierzu Abschätzungen von C_ν und $S_\nu^{(\lambda)}$. Die Nullentwicklung (61) sollte über die singuläre Kurve hinaus konvergieren. Entspricht die Konvergenzgrenze dem Kreise $|t| = 1-\varepsilon$, so muss $\lim \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = 1-\varepsilon$, also $|C_\nu| < g\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu$ sein, unter g eine endliche positive Konstante verstanden. Um die $S_\nu^{(\lambda)}$ abzuschätzen, betrachten wir die Integrale, durch die sie definiert waren. Aus Formel (56) folgt (vergl. Satz XXIV), dass $\Omega_\nu(y) - O_\nu(y)$ eine gewisse lineare Funktion von

$$f_1\left(\frac{\psi(\alpha)}{y}\right), f_1'\left(\frac{\psi(\alpha)}{y}\right), \ldots . f_1^{(n-1)}\left(\frac{\psi(\alpha)}{y}\right)$$

ist. Umgekehrt können wir, wie man mühelos beweist, jede dieser n Funktionen und daher jede lineare Kombination von ihnen durch die n ersten $\Omega_\nu(y) - O_\nu(y)$ linear darstellen. Daraus folgt aber, dass sich der von λ abhängige Teil des Integranden von $S_\nu^{(\lambda)}$ in der Form schreiben lässt:

$$\frac{1}{(n-1)!}\binom{n-1}{\lambda}\frac{1}{y}\left[\frac{d^{n-\lambda-1}}{dt^{n-\lambda-1}}\left(\frac{\varphi_1(t)}{t}f_1\left(\frac{\psi(t)}{y}\right)\right)\right]_{(t=\alpha)} =$$

$$=\sum_0^{n-1\mu} A_\mu^{(\lambda)} O_\mu(y)+R_\lambda(y),$$

dabei bedeutet $R_\lambda(y)$ eine lineare Kombination der n ersten $\Omega_\nu(y)$, also eine überall ausserhalb der singulären Kurve stetige analytische Funktion. Aus unserer letzten Formel und Formel (59) folgt sofort

$$S_\nu^{(\lambda)} - A_\nu^{(\lambda)} + \frac{1}{2\pi i}\int R_\lambda(\zeta)\, \Pi_\nu(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{für } \nu < n,$$

$$S_\nu^{(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int R_\lambda(\zeta)\, \Pi_\nu(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{für } \nu \geqq n.$$

Dieses Integral für $S_\nu^{(\lambda)}$ ist unabhängig davon, über welche Niveaukurve ich es erstrecke; ich kann also als Integrationsweg eine Niveaukurve wählen, die zwischen der singulären Kurve und der Kurve mit dem Bildkreis $|t| \quad 1-\frac{\varepsilon}{2}$ verläuft, also etwa die Kurve mit dem Bild $|t| - 1-\frac{\varepsilon}{4}$. Die Länge dieser Kurve sei L. Verstehen wir unter M_λ das Maximum des absoluten Betrags von $R_\lambda(y)$ ausserhalb und auf unserer Kurve, so gilt wegen Ungleichung (49) für $S_\nu^{(\lambda)}$ die Abschätzung

$$|S_\nu^{(\lambda)}| \leqq \frac{1}{2\pi}\int |R_\lambda(\zeta)|\,|\Pi_\nu(\zeta)|\,|d\zeta| < \frac{L}{2\pi}\,\frac{M_\lambda M}{\left(1-\frac{\varepsilon}{4}-\delta\right)^\nu}, \quad (\nu \geq n).$$

Es gibt nun n verschiedene Zahlen M_λ; bezeichnen wir das Produkt der grössten mit $\frac{ML}{2\pi}$ mit M, so erhalten wir, unter δ eine beliebig kleine Grösse verstanden

$$|S_\nu^{(\lambda)}| < \frac{M}{\left(1-\frac{\varepsilon}{4}-\delta\right)^\nu}, \qquad (\nu \geqq n).$$

Aus unseren Ungleichungen für $|C_\nu|$ und $|S_\nu^{(\lambda)}|$ folgt nun

$$|C_\nu S_\nu^{(\lambda)} \mu(\mu-1)..(\mu-\lambda+1)\alpha^{\mu-\lambda}| \leqq \mu^n g M \left(\frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{4}-\delta}\right)^\nu, (\nu \geqq n).$$

Da wir $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ wählen können, so folgt daraus ohne weiteres die absolute Konvergenz der Doppelreihe für C_μ. Unsere Operationen sind daher völlig gerechtfertigt.

Satz XXVI.

Das System (57) von Nullentwicklungen ist ein vollständiges System.

Der Fall mehrerer Pole von $\bar{\varphi}_1(t)$ wird genau so behandelt, wie der eines einzigen Poles, nur die rechnerische Durchführung gestaltet sich weitläufiger. Hat $\bar{\varphi}_1(t)$ n Pole, so gibt es im allgemeinen n+1 Systeme von zugeordneten Funktionen, entsprechend den n+1 verschiedenen Klassen, in welche die Niveaukurven dann im allgemeinen zerfallen. Weniger als n+1 Systeme von zugeordneten Funktionen gibt es nur, wenn zwei oder mehr Pole auf demselben Kreis $|t| = \text{const.}$ liegen. Zum Beweis der Vollständigkeit des aus den Nullstellen von $\bar{\varphi}_2(t)$ abgeleiteten System von Nullentwicklungen (dies besteht aus soviel Reihen, als es Pole von $\bar{\varphi}_1(t)$ gibt, jeden mit seiner Vielfachheit gezählt) gebraucht man die verschiedenen Systeme von zugeordneten Funktionen analog wie wir die $O_\nu(y)$ und $\Omega_\nu(y)$.

Lebenslauf.

Ich, Maximilian Krafft, bin zu Pyrbaum i. Obpf. als Sohn des praktischen Arztes Dr. med. R. Krafft am 3. Nov. 1889 geboren, bin bayrischer Staatsangehöriger und evangelischer Konfession. Ich besuchte das Gymnasium zu Offenbach a. M., wo ich Ostern 1908 das Zeugnis der Reife erhielt.

Ich wandte mich der Mathematik zu und studierte die ersten zwei Semester in Heidelberg, die beiden folgenden in München. Nachdem ich im Sommer-Semester 1910 wieder die Universität Heidelberg besucht hatte, studierte ich von Herbst 1910 bis zum Sommer 1913, in welchem ich mein Staatsexamen bestand, in Marburg. Seitdem setzte ich meine Studien in Göttingen fort. Das Rigorosum bestand ich am 22. Juli 1914. Meine akademischen Lehrer, denen ich ein dankbares Andenken bewahre, waren:

in Heidelberg: Boehm, M. Cantor, Koehler, Königsberger, Lenard, Pockels, Wolf;

in München: Lindemann, Pringsheim, Sommerfeld, Röntgen, Voss;

in Marburg: Cohen, v. Dalwigk, Feussner, Hellinger, Hensel, E. Neumann, Misch, Natorp, Richarz, Schulze, Wegener;

in Göttingen: F. Bernstein, Carathéodory, Courant, Haar, Hilbert, Landau, Lexis.

Vor allem aber möchte ich Herrn Professor Dr. Neumann, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gab und mich bei ihrer Ausführung mit seinem Rat unterstützte, meinen herzlichsten Dank aussprechen.

WERNER DOHA
OFFENBACH A.